

Advertising Budget Allocation for Customer Acquisition and Retention Using a Dynamic Control Approach: A Case Study of Iran's Dairy Industry

Habib Shahbazi^{1*}

^{1*} Department of Agricultural Economics, Seyyed Jamaledin Asadabadi University, Asadabad, Hamedan (Corresponding author), Email: shahbazi@sjau.ac.ir

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 29/07/2026

Received in revised form: 20/08/2026

Accepted: 31/08/2026

Available online: 23/09/2026

Keywords:

Advertising budget optimization
customer acquisition
customer retention
dairy industry
Vidale-Wolfe model
optimal control

ABSTRACT

Objective: This study aims to determine the optimal advertising budget allocation policy between customer acquisition and retention activities in Iran's dairy industry, focusing on five major brands across milk and cheese markets, and to evaluate strategic differences among large, medium, and small brands under competitive conditions and resource constraints.

Method: The study employs the classical dynamic optimal control theory framework (Pontryagin's principle) and the generalized Vidale-Wolfe model to capture the relationship between advertising and market share. The market share state equation incorporates two types of advertising effort: acquisition and retention. The optimization problem is formulated as maximizing total discounted profit subject to state differential equations, initial conditions, and boundary conditions. Using Pontryagin's maximum principle, the Hamiltonian is constructed and first-order optimality conditions are derived. Data include monthly sales, advertising expenditures, prices, and profit margins for the three-year period 2022–2024.

Findings: Results indicate that the optimal budget allocation ratio for market-leading brands is approximately 70% for acquisition and 30% for retention, whereas follower brands required a ratio close to 50–50. The advertising return on investment index ranges from 1.65 to 3.12. The customer lifetime value-to-acquisition cost ratio ranges from 33.6 for Brand 5 to 134.7 for Brand 1 in cheese. The payback period is estimated at 9 months for cheese Brand 1 and 36 months for milk Brand 5. The shadow value of one percentage point of market share for cheese Brand 1 was 20.5 billion rials at the beginning of the period and 14.2 billion rials for milk.

Conclusion: By extending the Vidale-Wolfe optimal control model to a multi-brand competitive setting, calibrating competitive shock parameters based on the Dorfman-Steiner framework and GARCH estimates (rather than the empirically unsupported assumptions common in the literature), and fitting the model to real data from Iran's dairy industry, this study provides a practical decision rule for advertising budget allocation. The findings indicate that optimal advertising budget allocation is strongly dependent on brand strength, competitive position, and product category. Market leaders should maintain a 70–30 ratio and focus on loyalty reinforcement; mid-tier brands need to increase their retention budget share to 35–40%; and follower brands should move toward a 50–50 ratio and allocate 70–80% of their budget to digital advertising.

Article Type: Research Paper



©Authors

Cite: Shahbazi, H. (2026). Advertising Budget Allocation for Customer Acquisition and Retention Using a Dynamic Control Approach: A Case Study of Iran's Dairy Industry. *Journal of Intelligent Financial Management*, 2(3), 51-76.

Journal of Intelligent Financial Management,
2025, Vol. 2, No.3, pp. 51- 76

Publish by:

Tolou-e Binish-e Ayandeh Scientific Institute

<https://doi.org/10.25843/JIFM.2025.8563.268742>

تخصیص بودجه تبلیغاتی جذب و نگهداشت مشتری با رویکرد کنترل پویا: مطالعه موردی صنعت لبنیات ایران

حبیب شهبازی^{۱*}

۱ و * - گروه اقتصاد کشاورزی، دانشگاه سید جمال الدین اسدآبادی، اسدآباد، همدان (نویسنده مسئول)، ایمیل نویسنده مسئول: shahbazi@sjau.ac.ir

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۵/۰۷

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۵/۲۹

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۰۹

تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

کلیدواژه‌ها:

بهینه‌سازی بودجه تبلیغات
جذب مشتری
نگهداشت مشتری
صنعت لبنیات
مدل ویدال-ولف
کنترل بهینه

چکیده

هدف: در این پژوهش، هدف، تعیین سیاست بهینه تخصیص بودجه تبلیغاتی بین فعالیت‌های جذب مشتریان جدید و نگهداشت مشتریان فعلی در صنعت لبنیات ایران، با تمرکز بر پنج برند اصلی در دو بازار شیر و پنیر و ارزیابی تفاوت‌های راهبردی بین برندهای بزرگ، متوسط و کوچک در شرایط رقابتی و محدودیت منابع است.

روش: مطالعه حاضر، از چارچوب نظریه کنترل بهینه پویا کلاسیک (نظریه پونتریاگین) و مدل تعمیم‌یافته ویدال-ولف برای مدل‌سازی رابطه بین تبلیغات و سهم بازار استفاده می‌کند. معادله حالت سهم بازار شامل دو نوع تلاش تبلیغاتی، جذب و نگهداشت است. مسئله بهینه‌سازی به صورت بیشینه‌سازی سود تنزیل‌شده کل با قید معادلات دیفرانسیل حالت، شرایط اولیه و مرزی تدوین گردید. با استفاده از اصل حداکثر پونتریاگین، هامیلتونی، تشکیل و شرایط مرتبه اول بهینگی استخراج شد. داده‌های مورد استفاده شامل فروش ماهانه، هزینه‌های تبلیغاتی، قیمت و حاشیه سود برای دوره سه‌ساله ۱۴۰۱ تا ۱۴۰۳ می‌باشد.

یافته‌ها: نتایج نشان می‌دهد، نسبت بهینه تخصیص بودجه برای برندهای رهبر، حدود ۷۰ درصد برای جذب و ۳۰ درصد برای نگهداشت است، در حالی که برندهای پیرو، به نسبت نزدیک به ۵۰ به ۵۰ نیاز داشتند. شاخص بازگشت سرمایه تبلیغاتی بین ۱/۶۵ تا ۳/۱۲ متغیر است. نسبت ارزش طول عمر مشتری به هزینه جذب از ۳۳/۶ برای برند ۵ تا ۱۳۴/۷ برای برند ۱ پنیر می‌باشد. دوره بازگشت سرمایه برای برند ۱ پنیر، ۹ ماه و برای برند ۵ شیر، ۳۶ ماه برآورد شد. ارزش سایه‌ای یک درصد سهم بازار برای برند ۱ پنیر، در ابتدای دوره ۲۰/۵ میلیارد ریال و ۱۴/۲ میلیارد ریال در شیر بود.

نتیجه‌گیری: این مطالعه با تعمیم مدل کنترل بهینه ویدال-ولف به فضای رقابت چندبرندی، کالیبراسیون پارامترهای شوک رقابتی بر مبنای چارچوب دورفمن-اشتاینر و برآوردهای GARCH (به جای فرض‌های بدون پشتوانه تجربی رایج در ادبیات)، و برآزش با داده‌های واقعی صنعت لبنیات ایران، قاعده‌ای عملی برای تخصیص بودجه تبلیغاتی ارائه می‌دهد. با توجه به نتایج، تخصیص بهینه بودجه تبلیغاتی به شدت به قدرت برند، موقعیت رقابتی و دسته محصول وابسته است. برندهای رهبر باید بر حفظ نسبت ۷۰-۳۰ و تقویت وفاداری تمرکز کنند، برندهای میان‌رده نیاز به افزایش بودجه نگهداشت به ۳۵ تا ۴۰ درصد دارند و برندهای پیرو باید نسبت را به ۵۰-۵۰ نزدیک کرده و ۷۰ تا ۸۰ درصد بودجه را به تبلیغات دیجیتال اختصاص دهند.

نوع مقاله: پژوهشی



© نویسنده‌گان

استناد: شهبازی، حبیب. (۱۴۰۵). تخصیص بودجه تبلیغاتی جذب و نگهداشت مشتری با رویکرد کنترل پویا: مطالعه موردی صنعت لبنیات ایران. *مدیریت مالی هوشمند*، ۲(۳)، ۵۱-۷۶.

نشریه مدیریت مالی هوشمند، ۱۴۰۵، دوره ۲، شماره ۳، صفحه ۵۱-۷۶.

ناشر: موسسه علمی طلوع بینش آینده

<https://doi.org/10.25843/JIFM.2025.8563.268742>

۱. مقدمه

تصمیم‌گیری درباره تخصیص بودجه تبلیغاتی همواره یکی از دغدغه‌های اصلی مدیران بازاریابی است (ری‌نارتز^۱ و همکاران، ۲۰۰۵ و گول^۲ و همکاران، ۲۰۲۴). بنگاه‌ها پیوسته با این پرسش مواجه هستند که چه بخشی از بودجه محدود خود را باید صرف جذب مشتریان جدید کنند و چه بخشی را به حفظ مشتریان فعلی اختصاص دهند (ویلانوا^۳ و همکاران، ۲۰۰۸ و رم‌دینپوی^۴ و همکاران، ۲۰۲۶). این موضوع در صنایع و کالاهای سریع مصرف^۵ مثل لبنیات که مصرف‌کنندگان به راحتی برند خود را عوض می‌کنند اهمیت بیشتری پیدا می‌کند (شهبازی^۶، ۱۴۰۴ و اتامن^۷ و همکاران، ۲۰۲۶). مطالعات بازاریابی نشان داده‌اند که نگهداشت مشتریان فعلی از نظر اقتصادی مقرون به صرفه‌تر از جذب مشتریان جدید است و افزایش نرخ حفظ مشتری تأثیر مستقیم روی سودآوری دارد (ریشهلد و شفرتر^۸، ۲۰۰۰). با این حال، در عمل بنگاه‌ها همچنان بیشتر بودجه خود را روی جذب مشتری جدید هزینه می‌کنند (ری‌نارتز و همکاران، ۲۰۰۵). این مسئله در بازار ایران پیچیدگی‌های ویژه‌ای دارد. نوسانات اقتصادی، محدودیت‌های واردات و تغییرات سریع در سلیقه مصرف‌کنندگان، باعث شده الگوهای سنتی برای تصمیم‌گیری کافی نباشند (شهبازی، ۱۳۹۷ و ۱۴۰۰). از طرف دیگر، رشد شبکه‌های اجتماعی و تبلیغات دیجیتال، کانال‌های جدیدی برای ارتباط با مشتری ایجاد کرده که خود نشان از این دارد که بایستی در شیوه تخصیص بودجه بازنگری شود (وان^۹، ۲۰۲۳؛ اسدالهی دهکردی، ۲۰۲۴ و فارغ و بهلی‌بیل، ۱۴۰۴).

برای مسئله تخصیص بودجه، ویدال و ولف^{۱۰} در دهه ۱۹۵۰ یکی از اولین تلاش‌ها را برای ساختار بندی رابطه بین تبلیغات و فروش انجام داد. این مدل بعدها توسط فیچتینگر^{۱۱} و همکاران (۱۹۹۴) برای شرایط مختلف بازار توسعه پیدا کرد. در سال‌های اخیر، یانگ^{۱۲} و همکاران (۲۰۲۲) و رم‌دینپوی و همکاران (۲۰۲۶) این مدل را با تفکیک تبلیغات جذب و نگهداشت، بهبود دادند و نشان دادند که تخصیص بهینه به ویژگی‌های بازار و محصول بستگی دارد.^{۱۳} در رویکردی کاربردی، تلیس^{۱۴} و همکاران (۲۰۰۰) در یک بررسی جامع، کشش تبلیغاتی را در رسانه‌های مختلف مقایسه کردند و نشان دادند که تفاوت‌های قابل توجهی در کشش تبلیغاتی بین رسانه‌های سنتی و دیجیتال وجود دارد. دانه‌ر و درگر^{۱۵} (۲۰۱۳) نیز نشان دادند که تأثیر تبلیغات روی جذب و نگهداشت در صنایع خدماتی متفاوت است و هر کدام استراتژی خاص خود را می‌طلبند.

صنعت لبنیات ایران با داشتن بیش از ۴۰۰ واحد تولیدی فعال و نیمه فعال و تولید سالانه بالغ بر ۱۲/۸ میلیون تن شیر خام (در سال ۱۴۰۳)، یکی از راهبردی‌ترین بخش‌های صنایع غذایی کشور است. با این حال، بررسی آمارهای رسمی نشان‌دهنده یک بحران در طرف تقاضا است؛ سرانه مصرف لبنیات از حدود ۱۳۰ کیلوگرم در سال ۱۳۸۹ به حدود ۵۵ تا ۶۰ کیلوگرم در سال ۱۴۰۳ کاهش یافته است (انجمن صنایع لبنی، ۱۴۰۳). این انقباض شدید بازار، فضای رقابتی را به یک «نبرد برای سهم بازار موجود» تبدیل کرده است (شهبازی، ۱۴۰۰).

¹ Reinartz² Guhl³ Villanueva⁴ Ramdinpuui⁵ Fast-Moving Consumer Goods (FMCG)⁶ Villanueva⁷ Ataman⁸ Reichheld & Scheffer⁹ Wan¹⁰ Vidale & Wolfe¹¹ Feichtinger¹² Yang^{۱۳} در پژوهش حاضر، منظور از تخصیص بودجه تبلیغاتی جذب و نگهداشت، تعیین سهم بهینه هر یک از این دو نوع هزینه تبلیغاتی از کل بودجه تبلیغاتی شرکت در طول زمان است؛ به عبارت دیگر، مسئله اصلی این نیست که به‌تنهایی چه مقدار باید به جذب یا به نگهداشت اختصاص یابد، بلکه نسبت پویایی بین این دو دسته هزینه برای جذب و برای نگهداشت است که با توجه به موقعیت رقابتی برند و پویایی بازار در طول زمان تغییر می‌کند.¹⁴ Tellis¹⁵ Danaher & Dagger

در چنین شرایطی، هزینه تبلیغات دیگر یک ابزار اختیاری برای رشد نیست، بلکه ابزاری برای بقا است. بررسی صورت‌های مالی شرکت‌های بورسی (مانند غپاک، غشصفا و غفارس) نشان می‌دهد که با وجود حاشیه سود خالص پایین این صنعت (متوسط ۳ تا ۹ درصد)، هزینه‌های فروش و توزیع که بخش عمده آن را تبلیغات و بازاریابی تشکیل می‌دهد، رشد سالانه بالغ بر ۳۸ درصدی را تجربه کرده است (کارگزاری فارابی، ۱۴۰۳). برای مثال، تنها در پاییز ۱۴۰۲، بیش از ۳۰ هزار آگهی تلویزیونی توسط برندهای مواد غذایی پخش شده که برندهای لبنی مانند رامک، سمیه و میهن در صدر آن بوده‌اند (گزارش شرکت تحقیقات بازار امروز، ۱۴۰۲).

ضرورت این تحقیق از آنجا است که در اقتصاد تورمی ایران، بهای تمام‌شده تولید (که ۸۰ درصد آن وابسته به قیمت شیر خام و نهاده‌ها است) به شدت افزایش یافته و حاشیه سود را به حداقل رسانده است. در نتیجه، هرگونه خطا در تخصیص بودجه تبلیغاتی (مثلاً تمرکز بیش از حد بر جذب در حالی که نرخ ریزش مشتری به دلیل نوسانات قیمتی بالا است) می‌تواند منجر به زیاندهی عملیاتی بنگاه شود. لذا مسئله اصلی صنعت لبنیات ایران صرفاً «تبلیغ کردن» نیست، بلکه «تخصیص بهینه» بین دو استراتژی جذب مشتری جدید (برای جبران کاهش مصرف سرانه) و نگهداشت مشتریان فعلی (برای حفظ سهم بازار در برابر رقبا) در یک افق زمانی پویا است.

در ایران شهبازی (۱۳۹۷، ۱۴۰۰ و ۱۴۰۴) در چند مطالعه، بودجه بهینه تبلیغات در محصول شیر و پنیر را با توجه به ساختار بازار و روش‌های مختلف تخصیص تعیین کرده است و یا صالحی و نوری (۱۳۹۵) روشی دومرحله‌ای برای تخصیص بودجه بازاریابی ارائه دادند. البته، البدوی و همکاران (۱۳۹۴) تخصیص بودجه برای فعالیتهای جذب و نگهداری مشتری در شرایط عدم قطعیت را محاسبه کردند.

با وجود پیشرفت‌های حاصل‌شده در مدل‌سازی پاسخ تبلیغات، ادبیات موجود در محیط رقابتی ایران همچنان فاقد یک چارچوب یکپارچه است که بتواند به صورت پویا تعامل میان جذب مشتریان جدید، وفاداری (نگهداشت) و تحولات سهم بازار را در صنعت لبنیات تبیین کند. مطالعات پیشین یا تبلیغات را به صورت یک متغیر کنترل واحد در نظر گرفته‌اند، یا پارامترهای رقابتی را بدون پشتوانه تجربی تعیین کرده‌اند، یا به بازار ایران با ویژگی‌های خاص آن (نوسانات قیمتی، تغییر سریع سلیقه مصرف‌کننده و رقابت چندبرندی) نپرداخته‌اند. این شکاف، ضرورت طراحی مدلی را توجیه می‌کند که هم تفکیک صریح بودجه جذب و نگهداشت را در خود داشته باشد و هم پارامترهای واقعی بازار ایران کالبره شده باشد. از آنجا که مسئله تخصیص بهینه در طول زمان ذاتاً یک مسئله کنترل پویا است، چارچوب کنترل بهینه کلاسیک (اصل حداکثر پونتریاگین) مناسب‌ترین ابزار تحلیلی برای این منظور است (فیچتینگر و همکاران، ۱۹۹۴؛ رم‌دینی و همکاران، ۲۰۲۶).

از این رو، هدف از این مطالعه، طراحی یک مدل بهینه‌سازی پویا برای تخصیص بودجه تبلیغاتی بین جذب و نگهداشت مشتری در صنعت لبنیات ایران بر پایه الگوی توسعه‌یافته ویدال-ولف (الگوی رم‌دینی و همکاران، ۲۰۲۶؛ یانگ و همکاران، ۲۰۲۲) است. این پژوهش با تعمیم مدل کنترل بهینه به فضای رقابت چندبرندی آغاز می‌شود و برخلاف رویکردهای رایج که پارامترهای شوک رقابتی را فرضی در نظر می‌گیرند، کالیبراسیون این پارامترها را بر مبنای چارچوب نظری دورفمن-اشتاینر (۱۹۵۴) و برآوردهای مدل GARCH انجام می‌دهد. سپس مدل با تکیه بر داده‌های واقعی صنعت لبنیات ایران برازش و اعتبارسنجی شده تا ضمن بررسی اثر عواملی چون حاشیه سود، نرخ تنزیل و اثربخشی تبلیغات، استراتژی‌های تخصیص برای برندهای بزرگ، متوسط و کوچک مقایسه و قاعده‌ای عملی برای تصمیم‌گیری مدیران استخراج گردد. بر این اساس و با توجه به شکاف پژوهشی مطرح‌شده، پرسش اصلی این پژوهش آن است که: مسیر زمانی بهینه تخصیص بودجه تبلیغاتی میان فعالیتهای جذب مشتریان جدید و نگهداشت مشتریان فعلی در صنعت لبنیات ایران، با در نظر گرفتن پویایی سهم بازار، رقابت میان برندها، نرخ ریزش مشتری و اثربخشی تبلیغات، چگونه باید تعیین شود تا سودآوری تنزیل‌یافته بنگاه در طول افق برنامه‌ریزی بیشینه گردد؟

۲. چارچوب نظری

تصمیم‌گیری درباره بودجه تبلیغات زمانی از اثربخشی لازم برخوردار است که آثار آن نه صرفاً در فروش جاری، بلکه در تحول تدریجی موقعیت رقابتی برند بررسی شود (ملا^۱ و همکاران، ۱۹۹۷؛ لودیش و ملا^۲، ۲۰۰۷؛ سریرام^۳ و همکاران، ۲۰۱۵). تبلیغات از یک سو می‌تواند زمینه ورود مشتریان جدید را فراهم آورد (تلیس و همکاران، ۲۰۰۰ و ویلانوا و همکاران، ۲۰۰۸) و از سوی دیگر، با تقویت تجربه و یادآوری برند، احتمال تداوم رابطه مشتریان فعلی را افزایش دهد (کلر و لمن^۴، ۲۰۰۶ و سرینیواسان^۵ و همکاران، ۲۰۱۴). با این حال، بازده این دو نوع فعالیت برای همه برندها و در تمام مقاطع زمانی یکسان نیست؛ زیرا اندازه بازار، جایگاه رقابتی، نرخ ریزش مشتریان و حساسیت تقاضا، اثربخشی نهایی مخارج تبلیغاتی را تحت تأثیر قرار می‌دهند (ستروامن^۶ و همکاران، ۲۰۱۸ و استینکمپ و گیسکنز^۷، ۲۰۱۴).

از این رو، سهم بازار را نمی‌توان صرفاً نتیجه مخارج تبلیغاتی یک دوره دانست، بلکه باید آن را حاصل انباشت آثار تبلیغات و واکنش متقابل برندهای رقیب در طول زمان تلقی کرد (دوب^۸ و همکاران، ۲۰۰۵). این برداشت با منطق مدل‌های پویای پاسخ به تبلیغات، به‌ویژه الگوی ویدال-ولف، سازگار است (ویدال و ولف، ۱۹۵۷ و فیچتینگر و همکاران، ۱۹۹۴). در چنین بستری، تفکیک تبلیغات جذب از تبلیغات نگهداشت، امکان تحلیل دقیق‌تر مسیرهای متفاوت اثرگذاری تبلیغات بر مشتریان را فراهم می‌کند (ری‌نارتز^۹ و همکاران، ۲۰۰۵؛ کومار^{۱۰} و همکاران، ۲۰۱۰ و رمدینپوی و همکاران، ۲۰۲۶). از سوی دیگر، محدودیت منابع و افزایش هزینه نهایی تبلیغات موجب می‌شود که افزایش مخارج، همواره به بهبود متناسب عملکرد منجر نشود (دورفمن و اشتاینر^{۱۱}، ۱۹۵۴ و سانهی^{۱۲} و همکاران، ۲۰۱۷ و دی‌مورایس^{۱۳} و همکاران، ۲۰۲۴). فزون بر این، در محیط‌های بازاریابی چندکاناله، لحاظ اثرات سرریز و برهم‌کنش میان رسانه‌ها نقش مهمی در ممانعت از اتلاف منابع ایفا می‌کند (دینر^{۱۴} و همکاران، ۲۰۱۴؛ لی و کنان، ۲۰۱۴ و چن و همکاران، ۲۰۲۵ و ژائو و همکاران، ۲۰۲۵).

بنابراین، مسئله تصمیم‌گیری از یک انتخاب ایستای حجم بودجه فراتر رفته و به یافتن یک مسیر زمانی بهینه برای تخصیص پویا میان جذب و نگهداشت تبدیل می‌گردد (فیچتینگر و همکاران، ۱۹۹۴؛ لی و همکاران، ۲۰۲۴ و یحیا و البلوک، ۲۰۲۵).

نظریه کنترل بهینه، چارچوب ریاضی و تحلیلی منسجمی را برای برقراری موازنه دقیق میان هزینه‌های جاری تخصیص منابع و ارزش فعلی منافع بلندمدت ناشی از تسخیر پایدار سهم بازار عرضه می‌کند (یانگ و ژو^{۱۵}، ۱۹۹۹؛ بوید و واندنبرگ^{۱۶}، ۲۰۰۴ و وو و لیو^{۱۷}، ۲۰۲۴). بر این مبنای، راهبرد بهینه تبلیغاتی سیاستی است که متناسب با سهم بازار لحظه‌ای برند، نرخ ریزش، ساختار رقابت و ارزش اقتصادی رابطه با مشتری، ترکیبی پویا و انعطاف‌پذیر از فعالیت‌های جذب و وفادارسازی را در طول افق برنامه‌ریزی هدایت کند (کومار و پترسون^{۱۸}، ۲۰۱۲؛ یانگ و همکاران، ۲۰۲۲ و رمدینپوی و همکاران، ۲۰۲۶).

¹ Mela

² Lodish & Mela

³ Sriram

⁴ Keller & Lehmann

⁵ Srinivasan

⁶ Sethuraman

⁷ Steenkamp & Geyskens

⁸ Dubé

⁹ Reinartz

¹⁰ Kumar

¹¹ Dorfman & Steiner

¹² Sahni

¹³ de Moraes

¹⁴ Dinner

¹⁵ Yong & Zhou

¹⁶ Boyd & Vandenberghe

¹⁷ Wu & Liu

¹⁸ Kumar & Petersen

۳. پیشینه تحقیق

در ایران، مطالعاتی در حوزه بهینه‌سازی بودجه تبلیغات، اثربخشی رسانه‌ها و استراتژی‌های بازاریابی انجام شده است که هر کدام به بخشی از این حوزه پرداخته‌اند.

شهبازی و فریادرس (۱۳۹۷) با استفاده از الگوی سطوح چندگانه بازاریابی، سطح بهینه بودجه تبلیغات عمومی شیر را در شرایط بازار غیررقابتی مورد بررسی قرار داد. نتایج این مطالعه نشان داد بیشترین ضریب شاخص شدت تبلیغات در سطح مزرعه (۳/۳۸۱۴۲ درصد) زمانی اتفاق می‌افتد که بازار در سطح مزرعه به صورت رقابتی و در سطح خرده‌فروشی به صورت انحصار کامل باشد. در مطالعه دیگری، شهبازی (۱۴۰۰) با به‌کارگیری روش‌های تخصیص مختلف شامل سرمایه‌گذاری جمعی، بهاء ثابت، بهاء سهمی و یارانه دولتی، شاخص شدت تبلیغات بهینه شیر را در اقتصاد باز و بسته بررسی کرد. یافته‌ها حاکی از آن است که در اقتصاد بسته، شاخص شدت تبلیغات بهینه در روش سرمایه‌گذاری جمعی ۱۹/۴۲ درصد، در روش بهاء ثابت و سهمی ۳۰/۹۱ درصد و با یارانه دولت ۵۴/۳۰ درصد است، درحالی‌که در اقتصاد باز این مقادیر به ترتیب ۱۰/۷۴ و ۲۰/۱۹ درصد می‌باشد. همچنین شهبازی (۱۴۰۴) با استفاده از تحلیل بیزی^۱ و الگوی اشباع و قیف فروش، بازده تبلیغات را در صنعت لبنیات ایران بررسی کرد. نتایج نشان داد مرحله آگاهی به‌تنهایی ۳۵ درصد از فروش نهایی را تبیین می‌کند و تبلیغات تلویزیونی عمده‌تأ در این مرحله مؤثر است اما سریعاً به سطح اشباع می‌رسد. در مقابل، تبلیغات دیجیتال اثر ماندگارتر و قوی‌تری بر مراحل میانی و پایانی قیف فروش دارد.

صالحی و نوری (۱۳۹۵) با ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها و بهینه‌سازی استوار، مدلی دومرحله‌ای برای مدیریت سبد مشتریان ارائه دادند. در مرحله اول، کارایی مشتریان با مدل BCC استوار ارزیابی و در مرحله دوم، تخصیص منابع با هدف بهینه‌سازی نسبت ارزش طول عمر مشتری به هزینه‌های بازاریابی انجام شد. البدوی و همکاران (۱۳۹۴) نیز با رویکرد بهینه‌سازی استوار سناریومحور ملوی^۲، مدلی برای تخصیص بودجه‌های ارتباط با مشتری ارائه کردند که پاسخ آن در همه شرایط پایدار می‌ماند.

در حوزه بازاریابی دیجیتال، اسداللهی و اسمعیل‌زاده (۱۴۰۳) با روش آمیخته به بررسی اثرات هوش مصنوعی بر بهینه‌سازی فرایندهای بازاریابی پرداختند و نشان دادند کاهش خطای انسانی مهم‌ترین تأثیر هوش مصنوعی است. حیدری‌مجد و همکاران (۱۴۰۱) با استفاده از نظریه داده‌بنیاد، پیشایندها و پیامدهای تبلیغات هوشمند را شناسایی کردند. فارغ و بهلی‌بهل (۱۴۰۴) اثربخشی تبلیغات رسانه‌های اجتماعی بر رفتار خرید فوری را تأیید نمودند و فارس‌حسنای و همکاران (۲۰۲۵) مدل بهینه تبلیغات رسانه‌های اجتماعی در بازاریابی B2B را در عراق طراحی کردند.

در دنیا، مدل‌سازی تخصیص بهینه بودجه تبلیغات و تأثیر آن بر فروش، از موضوعات کلیدی در ادبیات بازاریابی کمی محسوب می‌شود. رم‌دینپوی و همکاران (۲۰۲۶) با توسعه مدل تعمیم‌یافته ویدال-ولف، استراتژی تبلیغات را برای مشتریان موجود و جدید در بازار تقسیم‌بندی شده بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از اصل حداکثر پونتریاگین^۳ نشان دادند که سیاست بهینه تبلیغات دارای ساختار ضربه-ضربه^۴ است و زمان‌بندی تغییر بین استراتژی‌های تبلیغاتی به پارامترهای بازار و رقابت بستگی دارد. این مطالعه تأکید کرد که تخصیص بودجه باید به صورت پویا بین جذب مشتریان جدید و حفظ مشتریان موجود تنظیم شود. تلیس و همکاران (۲۰۰۰) در تحلیل گسترده‌ای شامل ۲۸۸ مطالعه، کشش تبلیغاتی را در کانال‌های مختلف رسانه‌ای بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد کشش تبلیغات دیجیتال (۰/۰۹) به‌طور معنی‌داری بیشتر از تبلیغات تلویزیونی (۰/۰۵۵) و چاپی (۰/۰۴۱) است. همچنین مشخص شد اثر تبلیغات در بازارهای جدید و برای

^۱ Bayesian analysis

^۲ Mulvey

^۳ Pontryagin

^۴ یک روش ریاضی برای حل مسائل کنترل بهینه است که بهترین مسیر تصمیم‌گیری در طول زمان را تعیین می‌کند.

^۵ Bang-Bang

محصولات جدید به مراتب قوی تر از محصولات بالغ است و اثرات بلندمدت تبلیغات تقریباً دو برابر اثرات کوتاه مدت می باشد.

در حوزه بهینه سازی چندکاناله، لی^۱ و همکاران (۲۰۲۴) با استفاده از داده های بزرگ و یادگیری ماشین، چارچوبی برای تخصیص بودجه تبلیغاتی در کانال های آنلاین و آفلاین ارائه دادند. مدل آن ها با در نظر گرفتن اثرات متقابل^۲ بین کانال ها نشان داد که نادیده گرفتن این اثرات می تواند منجر به تخصیص نادرست بودجه و کاهش تا ۲۳ درصدی بازده سرمایه گذاری تبلیغاتی شود.

سانهی و همکاران (۲۰۱۷) با انجام آزمون میدانی بزرگ مقیاس در پلتفرم تبلیغاتی آنلاین، تأثیر تبلیغات نمایشی را بر رفتار خرید اندازه گیری کردند. یافته های آن ها نشان داد اثر علی تبلیغات بسیار کوچک تر از همبستگی مشاهده شده بین نمایش تبلیغ و خرید است.

در زمینه مدل سازی پاسخ به تبلیغات، بروس^۳ و همکاران (۲۰۱۲) مدلی سلسله مراتبی بیزی برای تحلیل اثربخشی تبلیغات در سطوح مختلف جغرافیایی توسعه دادند. نتایج آن ها نشان داد واریانس قابل توجهی در پاسخ به تبلیغات بین مناطق مختلف وجود دارد و مدل های یکپارچه که این تفاوت ها را نادیده می گیرند، منجر به تخصیص ناکارای بودجه می شوند. ستروامن و همکاران (۲۰۱۸) در مطالعه ای جامع، کشش قیمت و تبلیغات را برای برندها در ۲۸۰ دسته محصول تحلیل کردند. آن ها دریافتند که میانگین کشش تبلیغات ۱۲/۰ است، اما این مقدار بسته به دسته محصول، قدرت برند و شرایط رقابتی به طور قابل توجهی متفاوت است.

در حوزه تبلیغات شبکه های اجتماعی، کومار و همکاران (۲۰۱۰) چارچوبی برای اندازه گیری ارزش مشتری در پلتفرم های اجتماعی ارائه دادند که سه بعد ارزش خرید، ارجاع و تأثیرگذاری را یکپارچه می کند. نتایج نشان داد تخصیص بودجه بر اساس این مدل یکپارچه، بازده سرمایه گذاری را تا ۴۰ درصد افزایش می دهد. لی و کنان^۴ (۲۰۱۴) مدل پویایی برای تخصیص بودجه بین تبلیغات جستجو و تبلیغات نمایشی آنلاین ارائه دادند. آن ها نشان دادند این دو نوع تبلیغات نقش های مکمل دارند و سیاست بهینه مستلزم تخصیص پویا بر اساس مرحله چرخه عمر محصول و رفتار رقبا است.

در مطالعات اخیر حوزه بازاریابی پویا، توجه ویژه ای به بهینه سازی تخصیص بودجه تحت شرایط عدم قطعیت و بازارهای پیچیده شده است. گول و همکاران (۲۰۲۴) چارچوبی جامع برای پیش بینی و بهینه سازی عملکرد بازاریابی در بازارهای پویا ارائه کردند که ترکیبی از اقتصادسنجی و عملیات پژوهی را به کار می گیرد. همچنین، یحیا و البلوک^۵ (۲۰۲۵) با ارائه یک مدل برنامه ریزی غیرخطی تصادفی، تخصیص بودجه کمپین های دیجیتال را تحت عدم قطعیت بررسی کرده و از روش هایی نظیر تقریب میانگین نمونه برای کنترل نوسانات دسترسی مخاطبان در صنایعی مانند کالاهای سریع مصرف بهره برده اند. توسعه مدل حاضر، همسو با این رویکردهای نوین، تلاش می کند با تفکیک هزینه های جذب و نگهداشت، دقت بهینه سازی تخصیص بودجه را در بازار رقابتی لینیات ارتقا دهد.

در این راستا، در سال های اخیر، رویکردهای مدل سازی کمی و تخصیص بهینه بودجه بازاریابی با تمرکز بر رفتارهای پویای مصرف کننده، برهم کنش های چندکاناله و ناهمگنی ساختار بازار بیش از پیش تکامل یافته اند. در حوزه مدل سازی غیرخطی و حل ریاضی مسائل تخصیص بودجه، دی مورایس و همکاران (۲۰۲۴) چارچوبی دوسطحی مبتنی بر الگوریتم بهینه سازی تکامل تفاضلی را برای مدل های آمیخته بازاریابی توسعه دادند. تمرکز اصلی این پژوهش بر غلبه بر چالش های محاسباتی ناشی از پدیده های ذاتی تبلیغات، یعنی اثرات اشباع بازار (بازده نزولی) و اثرات ماندگاری تبلیغات^۶ بود. یافته های آنان نشان داد که عدم لحاظ نرخ زوال تدریجی و انباشت زمانی اثر تبلیغات، کارایی سبد رسانه ای را

¹ Li

² Synergy Effects

³ Bruce

⁴ Li & Kannan

⁵ Yahia & ElBolok

⁶ Adstock

مخدوش می‌سازد؛ درحالی‌که تلفیق پویایی‌های ماندگاری با الگوریتم‌های فراابتکاری، دقت تخصیص منابع میان رسانه‌های مختلف را به میزان چشمگیری ارتقا می‌دهد.

از دیدگاه اثرات متقابل و سرریز میان کانال‌ها، چن^۱ و همکاران (۲۰۲۵) مسئله تخصیص بهینه بودجه در کمپین‌های چندکاناله را با در نظر گرفتن هم‌زمان اثرات سرریز^۲ بین کانال‌ها و اثرات ماندگار تبلیغات فرمول‌بندی کردند. آنان با بهره‌گیری از تقریب‌های سیال و استخراج ویژگی‌های ساختاری سیاست‌های کنترل بهینه نشان دادند که رویکردهای سنتی انتساب (مانند انتساب آخرین کلیک)، به دلیل نادیده گرفتن نقش غیرمستقیم و هم‌افزای کانال‌های آگاهی‌بخش، بودجه را به شکل زیربهینه توزیع می‌کنند. نویسندگان اثبات کردند که یک سیاست تخصیص ایستا اما مبتنی بر ساختار پویای سرریز، در کمپین‌های بلندمدت عملکردی بسیار نزدیک به سیاست بهینه پویا ارائه می‌دهد؛ این یافته به‌ویژه برای صنایعی مانند لبنیات که در آن ابزارهای ترویج، تبلیغات محیطی و رسانه‌های جمعی نقش مکمل ایفا می‌کنند، کاربرد ساختاری دارد.

در سطح زنجیره توزیع و کانال‌های فیزیکی، ژیاو^۳ و همکاران (۲۰۲۵) با استفاده از مدل‌سازی مبتنی بر خوشه‌بندی دوجانبه^۴، به بهینه‌سازی تخصیص منابع بازاریابی در میان خرده‌فروشان آفلاین پرداختند. مدل ارائه‌شده با در نظر گرفتن محدودیت‌های بازده-ریسک و ناهمگنی رفتاری خرده‌فروشان اثبات کرد که دسته‌بندی هم‌زمان ویژگی‌های فروشگاه‌های و ابزارهای ترویج فروش، مانع از هدررفت بودجه در بخش‌های کم‌بازده شده و هم‌افزایی کانال‌های آفلاین را بیشینه می‌کند. همچنین در بستر تحولات رسانه‌ای، تام و لونگ^۵ (۲۰۲۵) با مرور نظام‌مند راهبردهای بازاریابی دیجیتال نشان دادند که ادغام تحلیل‌های میانگین-واریانس و پویایی‌های شبکه‌های اجتماعی در تصمیم‌گیری‌های تخصیص بودجه، امکان مدیریت هم‌زمان ریسک نوسانات بازار و بازده مورد انتظار تبلیغات را فراهم می‌سازد. در نهایت، مسنر و میلیورینی^۶ (۲۰۲۴) تأثیر عوامل فرهنگی و ساختار نهادی را بر هزینه‌کرد و کشش تقاضای ناشی از تبلیغات تلویزیونی بررسی کردند و نشان دادند که توابع پاسخ به تبلیغات در صورتی به تصمیمات بهینه و پایدار منجر می‌شوند که ضرایب اثربخشی رسانه‌ها متناسب با بافت نهادی و رفتاری بازار هدف کالیبره شوند.

برآیند این مطالعات نشان می‌دهد که اگرچه مبانی نظری کنترل بهینه، مدل‌های چندسطحی بازاریابی و اثرات ماندگاری تبلیغات به‌خوبی در ادبیات توسعه یافته‌اند، اما تبیین هم‌زمان اثرات سرریز بین کانالی، ساختار پویای رقابت و مراحل زنجیره‌ای تصمیم‌گیری مصرف‌کننده (مانند پویایی‌های آگاهی تا وفاداری) در چارچوب یک الگوی جامع تخصیص بودجه، همچنان از ضرورت‌های بنیادین این حوزه به‌شمار می‌رود؛ موضوعی که پژوهش حاضر در پی پاسخ‌گویی به آن در بستر صنعت مورد مطالعه است.

۴. روش‌شناسی پژوهش

۴-۱. رویکرد پژوهش (پارادایم، رویکرد، استراتژی و تاکتیک)

پژوهش حاضر در چارچوب پارادایم اثبات‌گرایی قرار دارد و از منطق استنتاجی (قیاسی) پیروی می‌کند. بر این اساس، از یک چارچوب نظری از پیش تعریف‌شده (مدل کلاسیک پاسخ تبلیغات ویدال-ولف و بسط ساختاری آن توسط رمدینپوی و همکاران، ۲۰۲۶) به‌عنوان مبنای تحلیل استفاده شده و فرضیه‌ها و پارامترهای مستخرج از این چارچوب با استناد به داده‌های تجربی بازار لبنیات ایران کالیبره و آزمون می‌شوند. از منظر هدف، پژوهش از نوع کاربردی است و در سطح استراتژی، رویکردی ترکیبی (تلفیق مدل‌سازی ریاضی کنترل بهینه با برآورد تجربی پانل) را اتخاذ می‌نماید. از حیث تاکتیک زمانی، تحلیل به‌صورت طولی در قالب داده‌های پانل ماهانه ۳۶ ماهه صورت گرفته است. این ساختار

¹ Chen

² Spillover

³ Xiao

⁴ Bi-clustering

⁵ Tam & Lung

⁶ Messner & Miglioni

روش شناختی امکان استخراج مسیرهای بهینه تخصیص بودجه تبلیغاتی را با اتکا به اعتبار درونی مدل ریاضی و اعتبار بیرونی داده‌های بازار فراهم می‌آورد.

۴-۲. مدل جبری تجزیه و تحلیل

مدل ویدال-ولف. مدل ویدال-ولف یکی از شناخته‌شده‌ترین مدل‌های تحلیل پاسخ بازار به تبلیغات است که در سال ۱۹۵۷ معرفی شد و رابطه بین تبلیغات و فروش را به شکلی شهودی نمایش می‌دهد. بر اساس این مدل، تغییرات در نرخ فروش یک محصول تحت تأثیر دو عامل اصلی پاسخ به تبلیغات که از طریق ثابت پاسخگویی β بر بخش فروخته‌نشده بازار اثر می‌گذارد و افت ناشی از فراموشی که از طریق ثابت کاهش δ بر بخش فروخته‌شده بازار تأثیر می‌گذارد، قرار دارد. متغیرهای اصلی مدل شامل $S(t)$ برای نرخ فروش واقعی، $u(t)$ برای نرخ هزینه تبلیغات، N برای حداکثر پتانسیل فروش یا سطح اشباع بازار و پارامترهای β و δ هستند. معادله دیفرانسیل مدل به صورت $\frac{dS(t)}{dt} = \beta u(t) \left(1 - \frac{S(t)}{N}\right) - \delta S(t)$ جمله اول آن نشان‌دهنده افزایش فروش از طریق تبلیغات بر روی بخش فروخته‌نشده بازار و جمله دوم نشان‌دهنده کاهش طبیعی فروش به دلیل فراموشی مشتریان است. این مدل می‌تواند برای یافتن بهترین سیاست تبلیغاتی به مسئله کنترل بهینه تبدیل شود که هدف آن بیشینه‌سازی $\max_u \int_0^T \pi(S, u, t) dt$ با قیود معادله حالت^۱، قید کنترل $0 \leq u \leq Q$ ، و شرط پایانی $x(T) = x_T$ است که در آن π تابع سود، Q حداکثر نرخ هزینه تبلیغاتی مجاز و T افق زمانی برنامه‌ریزی است.

مدل رم‌دینپوی و همکاران (۲۰۲۶). در این الگو، مدل ویدال-ولف با یک تمایز اساسی بسط داده می‌شود که تفکیک بین دو نوع تلاش تبلیغاتی را ممکن می‌سازد. نوع اول تبلیغات برای مشتریان جدید است که بر بخش‌های فروخته‌نشده بازار متمرکز است و هدف آن اقناع و جذب مشتریان بالقوه‌ای است که هنوز محصول را نخریده‌اند، از طریق ارائه اطلاعات بیشتر درباره محصول صورت می‌گیرد. نوع دوم تبلیغات برای مشتریان فعلی است که بر مشتریان در حال کاهش تمرکز دارد و هدف آن جلوگیری از فراموشی محصول و ممانعت از روی آوردن مشتریان به برندهای رقیب است. با در نظر گرفتن اثر هر دو نوع تبلیغات، معادله حالت توسعه‌یافته به صورت یک سیستم دیفرانسیل بسط داده می‌شود که به شکل رابطه (۱) است^۲:

$$\frac{dS}{dt} = \beta u_1(t) \left(1 - \frac{S(t)}{N}\right) - \delta(u_2)S(t) \quad (1)$$

در مدل کلاسیک ویدال-ولف پارامتر δ نرخ کاهش فروش در غیاب تبلیغات را نشان می‌دهد و این مشاهده تجربی را در بر می‌گیرد که اثر تبلیغات ماندگار است اما با گذر زمان کاهش می‌یابد، به این صورت که در غیاب تبلیغات مشتریان ممکن است علاقه خود را از دست بدهند یا به رقبا روی آورند. تبلیغات نگهداشت u_2 برای کاهش این افت طراحی شده است و بنابراین δ به عنوان یک تابع کاهنده از u_2 در نظر گرفته می‌شود، به این معنی که تلاش‌های قوی‌تر برای نگهداشت مشتری، نرخ ریزش را کاهش می‌دهد. پارامترهای مدل شامل N_i که حداکثر پتانسیل بازار یا اندازه بخش i و سطح اشباع فروش را نشان می‌دهد، x_i که سهم بازار یا نرخ فروش به صورت کسری از سطح اشباع N_i است، r_i که پاسخگویی تبلیغاتی مشتریان جدید در بخش i و کارایی تبدیل را نمایش می‌دهد، α_i که نرخ کاهش طبیعی یا ریزش و فراموشی مشتریان فعلی بدون تبلیغات نگهداشت است، γ_i که اثربخشی تبلیغات نگهداشت در کاهش نرخ ریزش را بیان می‌کند، π_i که حاشیه سود واحد از مشتریان بخش i است، ρ_i که ضریب تنزیل و اهمیت سود کوتاه‌مدت در برابر

^۱ State Equation

^۲ لازم به ذکر است متغیر حالت $x_i(t)$ سهم بازار برند i در زمان t را نشان می‌دهد که کمیتی بدون بُعد و در بازه $x_i(t) \in [0, 1]$ است. متغیرهای کنترل مدل شامل شدت تبلیغات جذب برند i ($u_{1i}(t)$) و شدت تبلیغات نگهداشت برند i ($u_{2i}(t)$) هستند که بر حسب میلیون ریال در ماه اندازه‌گیری می‌شوند. در میان پارامترهای ساختاری مدل شامل ضریب پاسخگویی تبلیغات جذب (β_i) و نرخ ریزش طبیعی مشتریان (α_i) است که با واحد «بر ماه» بیان می‌شوند. پارامتر γ_i اثربخشی تبلیغات نگهداشت در کاهش نرخ ریزش را می‌سنجد و واحد آن «بر میلیون ماه» است. حاشیه سود واحد با نماد π_i (بر حسب میلیون ریال) و نرخ تنزیل بین‌دوره‌ای با نماد ρ_i (بر ماه) نشان داده می‌شود. پارامترهای E_{1i} و E_{2i} نیز ضرایب هزینه نهایی تبلیغات جذب و نگهداشت را تعیین می‌کنند و واحد آن‌ها میلیون ریال ماه است. در تحلیل بهینه‌سازی پویا، $\lambda_i(t)$ متغیر کمکی (ارزش سایه‌ای سهم بازار) است که بر حسب میلیون ریال بیان می‌شود و شرط مرزی $\lambda_i(T) = 0$ را در انتهای افق زمانی برنامه‌ریزی برآورده می‌سازد. سرانجام، x_{i0} سهم بازار اولیه برند i در لحظه $t = 0$ است که شرط اولیه مسئله کنترل بهینه را تشکیل می‌دهد.

بلندمدت را نشان می‌دهد، ϵ_{1i} که پارامتر حساسیت هزینه تبلیغات برای مشتریان جدید است که مقدار بالاتر آن نشان‌دهنده جذب گران‌تر است و ϵ_{2i} که پارامتر حساسیت هزینه تبلیغات برای مشتریان فعلی است که مقدار بالاتر آن نشان‌دهنده نگهداشت گران‌تر است.

نظریه کنترل بهینه: نظریه کنترل بهینه، چارچوبی قوی برای تعیین تغییرات زمانی تلاش‌های تبلیغاتی فراهم می‌آورد. فرایندهای جذب و نگهداشت مشتری، پویا هستند و تصمیم تبلیغاتی فعلی بر سودآوری آتی اثرگذارند، بنابراین رویکرد بهینه‌سازی وابسته به زمان، ضروری است. با فرض اینکه u_{1i} و u_{2i} به ترتیب نرخ‌های اثربخشی تبلیغات برای مشتریان جدید و فعلی در زمان t برای بخش i باشند، معادله دیفرانسیل نرخ شدت فروش به شکل رابطه (۲) است:

$$\frac{dS_i}{dt} = r_i u_{1i}(t)(N_i - S_i(t)) - \delta_i(u_{2i})S_i(t) \quad (2)$$

با جایگذاری $x_i = S_i/N_i$ که سهم بازار را نشان می‌دهد و $\dot{x}_i = \dot{S}_i/N_i$ ، رابطه (۲) به شکل رابطه (۳) بازنویسی می‌شود:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_i u_{1i}(t)(1 - x_i(t)) - \delta_i(u_{2i})x_i(t), x_i(0) = x_{i0}, \quad (3)$$

رابطه (۳) نشان می‌دهد که سهم بازار در بخش i به دو عامل بستگی دارد. نخست، جذب مشتریان جدید با نرخ $r_i u_{1i}(1 - x_i)$ که به بخش فروخته‌نشده $(1 - x_i)$ بستگی دارد و دوم ریزش مشتریان فعلی با نرخ $\delta_i(u_{2i})x_i$ که با تبلیغات نگهداشت کنترل می‌شود. مسئله کنترل بهینه برای یافتن نرخ‌های اثربخشی تبلیغاتی بهینه u_{1i}^* و u_{2i}^* به گونه‌ای که سود تنزیل‌شده کل در طول افق برنامه‌ریزی بیشینه شود، به صورت رابطه (۴) است:

$$\max_{u_{1i}, u_{2i}} J[u_{1i}, u_{2i}] = \int_0^T \sum_{i=1}^M e^{-\rho_i t} (\pi_i x_i(t) - C_{1i}(u_{1i}(t)) - C_{2i}(u_{2i}(t))) dt \quad (4)$$

در رابطه (۴)، قیود معادله حالت و شرایط اولیه و مرزی $x_i(0) = x_{i0}$ و $x_i(t) \in [0, 1]$ وجود دارند. در رابطه (۴)، π_i حاشیه سود واحد در بخش i ، ρ_i نرخ تنزیل و C_{1i} و C_{2i} توابع هزینه لحظه‌ای تبلیغات برای مشتریان جدید و فعلی هستند. چنانچه فرض شود این توابع پیوسته و مشتق‌پذیر هستند و شرایط زیر را برآورده می‌کنند:

$$\begin{aligned} C_{1i}(0) = 0, C'_{1i} > 0, C''_{1i} > 0 \\ C_{2i}(0) = 0, C'_{2i} > 0, C''_{2i} > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

معادله تابع هدف (رابطه ۴) را می‌توان به صورت رابطه (۶) بازنویسی کرد:

$$J = \sum_{i=1}^M \int_0^T e^{-\rho_i t} F_i(x_i, u_{1i}, u_{2i}) dt \quad (6)$$

که در آن، F_i تابع چگالی سود بخش i است و یک مسئله کنترل بهینه با یک متغیر حالت x_i و دو متغیر کنترل u_{1i} و u_{2i} تشکیل می‌دهد. بر اساس اصل حداکثرسازی، هامیلتونی^۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_i = [\pi_i x_i - C_{1i}(u_{1i}) - C_{2i}(u_{2i})] + \lambda_i [r_i u_{1i}(1 - x_i) - \delta_i(u_{2i})x_i] \quad (7)$$

هامیلتونی را می‌توان به عنوان سود کل از تمام انتخاب‌های سیاستی تفسیر کرد که هم اثرات کوتاه‌مدت و هم بلندمدت را در نظر می‌گیرد. متغیر کمکی λ_i نشان می‌دهد که تغییر کوچکی در x_i در زمان t چه اثر آتی بر سود دارد؛ به بیان دیگر، λ_i نقشی مشابه متغیرهای دوگان در برنامه‌ریزی خطی دارد. شرط معادله کمکی به صورت $\frac{d\lambda_i}{dt} = \rho_i \lambda_i -$ است. از بهینه‌سازی هامیلتونی نسبت به u_{1i} و u_{2i} ، شرایط مرتبه اول بهیگی به دست می‌آید:

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_{1i}} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial C_{1i}}{\partial u_{1i}} + \lambda_i r_i (1 - x_i) = 0 \quad (8)$$

¹ Hamiltonian

تابعی است که در کنترل بهینه با ترکیب تابع هدف و دینامیک سیستم ساخته می‌شود تا بر اساس اصل حداکثر پونتریاگین مسیر بهینه را تعیین کند.

از آنجایی که هامیلتونی کاملاً مقعر در u_{1i} و u_{2i} است، با استفاده از قضیه کفایت منگاساریان^۱، مقادیر یکتا برای نرخ‌های اثربخشی تبلیغاتی به دست می‌آید. کنترل‌های بهینه به صورت شکل بسته، بصورت $u_{1i}^* = C_{1i}^{-1}(\lambda_i r_i(1 - x_i(t)))$ و $u_{2i}^* = C_{2i}^{-1}(\lambda_i \gamma_i x_i(t))$ خواهد بود که C_{1i}^{-1} و C_{2i}^{-1} تابع معکوس نرخ هزینه نهایی C_{1i}' و C_{2i}' هستند. نکته مهم این است که وقتی بازار به اشباع نزدیک می‌شود یعنی $x_i \rightarrow 1$ ، کنترل‌های بهینه به صفر یا حداقل میل می‌کنند، یعنی $u_{1i}^* \rightarrow 0$ و $u_{2i}^* \rightarrow 0$. متغیر کمکی بهینه به صورت رابطه (۹) است:

$$\lambda_i(t) = \int_t^T e^{-\rho_i(\tau-t)} (\pi_i + \lambda_i(r_i u_{1i}^* + \delta_i(u_{2i}^*))) d\tau \quad (9)$$

که در آن، $\lambda_i(T) = 0$ است. این معادله سود آتی حاصل از به دست آوردن یک واحد فروش اضافی یا به عبارتی ارزش نهایی هر واحد فروش در زمان t را نمایش می‌دهد.

الگوی هزینه درجه دو: برای دستیابی به نتایج تحلیلی دقیق‌تر و قابل پیاده‌سازی، حالت خاصی از مدل بررسی می‌شود که در آن توابع هزینه تبلیغاتی به صورت درجه دو است. این فرض تحلیلی، علاوه بر سادگی محاسباتی، منعکس‌کننده واقعیت اقتصادی هزینه نهایی فزاینده تبلیغات است و در ادبیات بازاریابی و انتشار نوآوری کاربرد گسترده‌ای دارد (برای مثال وو و لیو، ۲۰۲۴). توابع هزینه برای تبلیغات جذب مشتریان جدید و نگهداشت مشتریان فعلی به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{1i}(u_{1i}) &= \frac{\epsilon_{1i}}{2} u_{1i}^2 \\ C_{2i}(u_{2i}) &= \frac{\epsilon_{2i}}{2} u_{2i}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، ϵ_{1i} و ϵ_{2i} پارامترهای مثبت هستند که هزینه نهایی تلاش تبلیغاتی را در بخش i اندازه‌گیری می‌کنند. هرچه این پارامترها بزرگ‌تر باشند، هزینه افزایش تلاش تبلیغاتی بیشتر خواهد بود. ساختار درجه دو این توابع ویژگی محذب بودن را تضمین می‌کند و مسئله بهینه‌سازی را قابل حل می‌سازد. همچنین، نرخ کاهش یا ریزش مشتریان به عنوان تابعی خطی کاهنده از تبلیغات نگهداشت یعنی $\delta_i(u_{2i}) = \alpha_i - \gamma_i u_{2i}$ مدل‌سازی می‌شود که در آن α_i نرخ کاهش طبیعی مشتریان فعلی در غیاب تبلیغات نگهداشت است و γ_i اثربخشی تبلیغات نگهداشت در کاهش این نرخ را نشان می‌دهد. این شکل خطی ساده، سازگار با ساختار کلی مدل ویدال-ولف بوده و امکان تفسیر شهودی پارامترها را فراهم می‌آورد. با جایگذاری این شکل تابعی در مسئله کنترل بهینه، رابطه (۱۱) حاصل می‌شود:

$$\max_{u_{1i}, u_{2i}} \int_0^T \sum_{i=1}^M e^{-\rho_i t} \left(\pi_i x_i(t) - \frac{\epsilon_{1i}}{2} u_{1i}^2(t) - \frac{\epsilon_{2i}}{2} u_{2i}^2(t) \right) dt \quad (11)$$

در این رابطه، علاوه بر قیود معادله حالت مطرح‌شده در رابطه (۴)، شرط اولیه $x_i(0) = x_{i0}$ نیز وجود دارد. هامیلتونی متناظر با این مسئله به صورت رابطه (۱۲) نوشته می‌شود:

$$H_i = \left[\pi_i x_i - \frac{\epsilon_{1i}}{2} u_{1i}^2 - \frac{\epsilon_{2i}}{2} u_{2i}^2 \right] + \lambda_i [r_i u_{1i}(1 - x_i) - (\alpha_i - \gamma_i u_{2i}) x_i] \quad (12)$$

این هامیلتونی، ترکیبی از سود جاری و ارزش سایه‌ای تغییرات آینده سهم بازار است. شرایط مرتبه اول لازم برای بهینگی از مشتق‌گیری هامیلتونی نسبت به متغیرهای کنترل و مساوی قرار دادن آن‌ها با صفر به دست می‌آید. با حل این معادله برای متغیرهای کنترل، سیاست‌های تبلیغاتی بهینه را در قالب توابع بسته ارائه می‌دهد:

$$\begin{aligned} u_{1i}^* &= \frac{\lambda_i r_i (1 - x_i(t))}{\epsilon_{1i}} \\ u_{2i}^* &= \frac{\lambda_i \gamma_i x_i(t)}{\epsilon_{2i}} \end{aligned} \quad (13)$$

¹ Mangasarian Sufficiency Theorem

قضیه کفایت منگاساریان بیان می‌کند که اگر در یک مسئله بهینه‌سازی، تابع هدف و قیود نامساوی همگی محذب و قیود مساوی آفین (خطی) باشند، ارضای شرایط Karush-Kuhn (KKT) توسط یک نقطه مجاز، شرط کافی برای بهینگی سراسری آن نقطه است (بوید و وان‌دنبورگ، ۲۰۰۴)

رابطه (۱۳)، تلاش بهینه برای جذب مشتریان جدید u_{1i}^* متناسب با بخش فروخته‌نشده بازار $(1-x_i)$ است، به این معنی که هرچه بازار به اشباع نزدیک‌تر شود، سرمایه‌گذاری در جذب مشتریان جدید کاهش می‌یابد. به طور مشابه، تلاش بهینه نگهداشت u_{2i}^* متناسب با سهم فعلی بازار x_i است، زیرا هرچه مشتریان فعلی بیشتر باشند، ارزش نگهداری آن‌ها بالاتر است. هر دو کنترل به متغیر کمکی λ_i که نشان‌دهنده ارزش سایه‌ای سهم بازار است وابسته‌اند و با نزدیک شدن به پایان افق برنامه‌ریزی که $\lambda_i \rightarrow 0$ است، هر دو تلاش تبلیغاتی به سمت صفر میل می‌کنند. این رفتار منطبق با اصل اقتصادی کاهش سرمایه‌گذاری در پایان دوره برنامه‌ریزی است. معادله دیفرانسیل متغیر کمکی در این حالت خاص به صورت رابطه (۱۴) ساده‌سازی می‌شود:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \rho_i \lambda_i - \pi_i - \lambda_i (r_i u_{1i}^* + \alpha_i - \gamma_i u_{2i}^*), \lambda_i(T) = 0 \quad (14)$$

رابطه (۱۴)، همراه با معادله حالت و کنترل‌های بهینه، یک سیستم معادلات دیفرانسیل دو نقطه مرزی^۱ را تشکیل می‌دهد که حل آن مسیرهای بهینه سهم بازار، متغیر کمکی و تلاش‌های تبلیغاتی را در طول افق برنامه‌ریزی تعیین می‌کند.^۲

در مجموع در این مطالعه یک سیستم معادلات دیفرانسیل دو نقطه مرزی را نشان می‌دهد که شامل معادله حالت سهم بازار، کنترل‌های بهینه تبلیغاتی و معادله متغیر کمکی است و حل عددی آن مسیرهای زمانی بهینه سرمایه‌گذاری تبلیغاتی را تعیین می‌کند. این ساختار شهودی چارچوبی برای تفسیر اقتصادی سیاست‌های بهینه به‌ویژه تبلیغات فراهم می‌آورد.

۴-۳. داده‌ها و روش جمع‌آوری آن

برای برآورد تجربی مدل برای بخش لبنیات ایران، مجموعه‌ای از داده‌ها در چهار دسته اصلی مورد نیاز است. نخست، داده‌های فروش ماهانه پنج برند مطرح (کاله، پگاه، میهن، رامک و دامداران)^۳ در دو گروه محصولی شیر و پنیر گردآوری شد. سپس سهم بازار هر برند $(x_i(t))$ از نسبت فروش آن برند به کل فروش بازار به دست آمد و پتانسیل بازار (N_i) نیز با استفاده از آمارهای مصرف سرانه برآورد گردید. دوم، داده‌های تبلیغات و بازاریابی است که شامل هزینه تبلیغات جذب (u_1) برای رسانه‌های جمعی نظیر تلویزیون، رادیو، بیلورد و دیجیتال مارکتینگ و هزینه تبلیغات نگهداشت (u_2) برای کمپین‌های وفاداری، کلاب مشتریان، پیامک و سیستم‌های مدیریت ارتباط با مشتری است که با توجه به عدم دسترسی به تفکیک دقیق، از نسبت‌های تقریبی ۷۰ درصد جذب و ۳۰ درصد نگهداشت استفاده می‌شود.^۴ سوم، داده‌های مالی شامل قیمت فروش واحد و هزینه تمام‌شده بوده و برای محاسبه حاشیه سود واحد (π_i) به کار می‌رود؛ همچنین نرخ تنزیل (ρ_i) بر مبنای نرخ بهره بانکی برآورد می‌شود. چهارم، داده‌های رفتاری مصرف‌کننده از جمله نرخ جابجایی برند، درصد وفاداری و نرخ ریزش مشتریان که برای تخمین پارامترهای α_i ، γ_i و δ_i ضروری است و از پنل‌های مصرف‌کننده قابل استخراج است. داده‌های این پژوهش از چند منبع مکمل گردآوری و در سطح ماهانه همسان‌سازی شد. اطلاعات قیمت، شاخص قیمت مصرف‌کننده و برخی آمارهای رسمی از مرکز آمار ایران، داده‌های تولید و مصرف صنعت از انجمن صنایع لبنی ایران، و اطلاعات مالی شرکت‌های بورسی از صورت‌های مالی حسابرسی‌شده و سامانه

^۱ Two-Point Boundary Value Problems

در مباحث کنترل بهینه، شرایط حالت سیستم در ابتدا (t_0) و شرایط متغیر هم‌حالت (co-State) در انتها (t_f) مشخص می‌شود، به همین دلیل یک مسئله مقدار مرزی دو نقطه است. ^۲ سیستم دو نقطه مرزی حاصل از شرایط بهینگی شامل شرط اولیه $x_i(0) = x_{i0}$ (سهم بازار مشاهده‌شده در ابتدای دوره) و شرط مرزی پایانی $\lambda_i(T) = 0$ است. شرط اخیر بیانگر این واقعیت اقتصادی است که در پایان افق برنامه‌ریزی، ارزش سایه‌ای هر واحد سهم بازار اضافی به صفر میل می‌کند و انگیزه‌ای برای سرمایه‌گذاری تبلیغاتی باقی نمی‌ماند. ^۳ جامعه آماری این پژوهش شامل ۵ برند پیشرو و مطرح در صنعت لبنیات کشور است. به دلیل محرمانه بودن داده‌های مالی و هزینه‌ای و همچنین رعایت اصول اخلاقی پژوهش (حفظ محرمانگی اطلاعات سازمان‌ها)، نام این برندها بدون ترتیب مشخص و تحت عناوین «برند ۱» تا «برند ۵» گزارش شده است.

^۴ این نسبت یک فرض اولیه برای کالیبراسیون الگو است و نتایج بهینه‌سازی (خروجی مدل) در سناریوهای مختلف بررسی خواهند شد تا نسبت ۷۰ به ۳۰ ارزیابی گردد. با این حال، برای اطمینان از استواری (Robustness) مدل، آنالیز حساسیت بر روی این پارامتر اولیه صورت خواهد گرفت؛ از دیدگاه نظری، در مقایسه با مدل‌های کلاسیک نظیر مدل ویدال-ولف که اثرات تبلیغات را به‌صورت متقارن و یکپارچه در نظر می‌گیرد، تفکیک پویای جذب و نگهداشت در مدل می‌تواند خطای پیش‌بینی را کاهش می‌دهد و قدرت تبیین مدل را در محیط رقابتی بازار FMCG به‌طور قابل‌توجهی ارتقا می‌بخشد.

کدال استخراج شد. داده‌های پنل مصرف‌کننده نیز از خانوارهای منتخب در پنج شهر بزرگ گردآوری شد. به‌منظور تلفیق منابع، تمامی متغیرهای پولی بر پایه شاخص قیمت مصرف‌کننده با سال پایه ۱۴۰۰=۱۰۰ تعدیل شدند، داده‌های شرکت‌محور به برندهای متناظر تخصیص یافتند، و برای برندهای غیربورسی برآورد حاشیه سود و ساختار هزینه بر اساس میانگین نسبت‌های صنعت و سهم بازار انجام شد. همچنین به دلیل نبود تفکیک دقیق هزینه تبلیغات، تخصیص هزینه بین تبلیغات جذب و نگهداشت بر مبنای نسبت ۷۰ به ۳۰ و با اتکا به اطلاعات مدیریتی انجام شد. دوره زمانی این پژوهش، یک بازه ۳۶ ماهه (از سال ۱۴۰۱ تا ۱۴۰۳) را در بر می‌گیرد تا علاوه بر شناسایی الگوهای فصلی و روندهای بازار، تحولات ناشی از تورم، تحریم‌ها و تغییرات رفتار مصرف‌کننده نیز پوشش داده شود. در نهایت، تمامی داده‌های قیمتی با استفاده از شاخص قیمت مصرف‌کننده (CPI) تعدیل شده‌اند تا اثرات نوسانات شدید تورمی در تحلیل‌ها کنترل شود.

۴-۴. روش تجزیه و تحلیل عددی

سیستم دو نقطه مرزی متشکل از معادلات (۳)، (۱۳) و (۱۴) با روش تیراندازی^۱ حل خواهد شد. در این روش، مقدار اولیه $\lambda_i(0)$ به‌عنوان پارامتر آزاد در نظر گرفته می‌شود و با الگوریتم نیوتن-رافسون^۲ به‌گونه‌ای تنظیم می‌شود که شرط مرزی $\lambda_i(T) = 0$ برآورده شود. انتگرال‌گیری زمانی با روش رانج-کوتا^۳ مرتبه چهارم با گام زمانی $\Delta t = 1$ ماه انجام خواهد شد. معیار توقف الگوریتم، $|\lambda_i(T)| < 10^{-6}$ تعریف شده است. تمامی محاسبات در نرم‌افزار MATLAB با استفاده از تابع bvp4c پیاده‌سازی و نتایج با روش تیراندازی دستی مقایسه و تأیید شد.

۵. یافته‌های پژوهش

پس از تدوین چارچوب نظری، در این بخش به ارائه یافته‌های تجربی و تحلیل عملکرد پنج برند اصلی لبنیات ایران پرداخته می‌شود. ابتدا پارامترهای برآوردی و شاخص‌های کلیدی عملکرد هر برند در دو بازار شیر و پنیر ارائه می‌شود تا وضعیت فعلی رقابتی مشخص گردد. سپس تخصیص بهینه بودجه تبلیغاتی و تحلیل ارزش سایه‌ای ارائه می‌گردد. در نهایت، شبیه‌سازی سه سناریوی رقابتی (ورود رقیب جدید، جنگ قیمت، و افزایش هزینه رسانه‌ای) و پاسخ‌های استراتژیک بهینه و آسیب‌پذیری‌های هر برند بررسی می‌گردد.

۵-۱. توصیف داده‌ها

برای برآورد تجربی مدل در بخش لبنیات ایران، مجموعه‌ای از داده‌های ماهانه مربوط به پنج برند فعال در دو گروه محصولی شیر و پنیر طی دوره ۳۶ ماهه (فروردین ۱۴۰۱ تا اسفند ۱۴۰۳) گردآوری شد که در مجموع ۱۸۰ مشاهده برند-ماه (برای هر محصول) را تشکیل می‌دهد. جدول (۱) آمار توصیفی متغیرهای اصلی پژوهش را به تفکیک منبع داده ارائه می‌دهد. پنل مصرف‌کننده با نمونه‌گیری طبقه‌بندی‌شده از ۱۲۰۰ خانوار در شهرهای تهران، اصفهان، مشهد، تبریز و شیراز اجرا شده و پرسش‌نامه ماهانه شامل سؤالات مربوط به آخرین خرید، وفاداری به برند و دلیل تعویض برند بوده است.^۴ داده‌های مالی سه شرکت پذیرفته‌شده در بورس، که برندهای مورد بررسی زیرمجموعه یا برند اصلی آن‌ها محسوب می‌شوند، از صورت‌های مالی حسابرسی‌شده منتشرشده در سامانه جامع اطلاع‌رسانی ناشران (کدال) استخراج می‌شود. از آنجا که صورت‌های مالی در سطح شرکت گزارش می‌شوند، متغیرهای مالی در سطح شرکت-دوره اندازه‌گیری شده و به برندهای متناظر تخصیص یافتند؛ برای دو برند غیربورسی، حاشیه سود و ساختار هزینه با استفاده

^۱ Shooting Method

^۲ Newton-Raphson

^۳ Runge-Kutta

^۴ داده‌های پنل مصرف‌کننده از طریق نمونه‌گیری تصادفی طبقه‌بندی‌شده با تخصیص متناسب گردآوری شد. جامعه آماری، خانوارهای مصرف‌کننده شیر و پنیر صنعتی در شهرهای تهران، اصفهان، مشهد، تبریز و شیراز را در بر می‌گیرد. طبقات نمونه از ترکیب ۵ شهر و ۳ طبقه درآمدی (پایین، متوسط و بالا) شامل ۱۵ طبقه تعریف گردید. حجم نمونه اولیه پژوهش با استفاده از فرمول کوکران برای جوامع نامحدود (با سطح اطمینان ۹۵ درصد و خطای مجاز ۳ درصد) معادل ۱۰۶۷ خانوار تعیین شد. سپس به‌منظور پوشش عدم پاسخ‌گویی و جبران ریزش احتمالی در طول دوره مطالعه، حدود ۱۲/۵ درصد به حجم نمونه افزوده شد و حجم نمونه نهایی به ۱۲۰۰ خانوار رسید. در صورت خروج هر خانوار از پنل، خانوار جایگزین از همان شهر و طبقه درآمدی انتخاب گردید.

از نسبت‌های میانگین صنعت (گزارش سالانه انجمن صنایع لبنی) و تعدیل بر اساس سهم بازار برآورد گردید. برای پاک‌سازی داده‌ها، ابتدا مقادیر پرت با استفاده از معیار سه انحراف معیار از میانگین متحرک سه‌ماهه شناسایی و با میانگین‌گیری از دو دوره مجاور جایگزین شدند. داده‌های فروش ماه‌های با وقفه گزارش‌دهی (کمتر از ۲ درصد کل مشاهدات) با روش درون‌یابی خطی تکمیل شد. تمامی متغیرهای قیمتی و مالی با استفاده از شاخص قیمت مصرف‌کننده پایه ۱۴۰۰=۱۰۰ منتشر شده توسط مرکز آمار ایران تعدیل شدند تا اثر تورم شدید دوره مورد مطالعه (میانگین تورم نقطه‌به‌نقطه حدود ۴۲ درصد) از نوسانات واقعی متغیرها تفکیک شود.

جدول ۱. آمار توصیفی و منابع متغیرهای پژوهش

متغیر	Mean	SD	Min	Max	منبع
$x_i(t)$	۲۱/۳	۸/۴	۷/۹	۳۳/۷	گزارش‌های ماهانه انجمن صنایع لبنی ایران
u_{1i}	۲/۶	۱/۱	۰/۹	۵/۲	صورت‌های مالی حسابرسی شده شرکت‌های بورسی (کدال) و برآورد نسبتی برای غیربورسی
u_{2i}	۱/۳	۰/۶	۰/۴	۲/۸	بر اساس تفکیک بر مبنای نسبت ۷۰-۳۰ گزارش شده در مصاحبه با مدیران بازاریابی
π_i	۳/۶	۰/۹	۲/۵	۵/۲	صورت سود و زیان شرکت‌های بورسی؛ برای شرکت‌های غیربورسی از نسبت‌های صنعت (انجمن صنایع لبنی) استخراج شده
قیمت	۱۱۸/۴	۲۴/۷	۷۸/۰	۱۷۸/۰	مرکز آمار ایران
α_i	۰/۱۵	۰/۰۳	۰/۱۱	۰/۲۱	پنل مصرف‌کننده ۱۲۰۰ خانوار (فروشگاه‌های زنجیره‌ای رفاه و هایپرستار)

۵-۲. پارامترهای برآوردشده مدل و مسیرهای سهم بازار

در این بخش، ابتدا مقادیر برآوردشده پارامترهای کلیدی مدل برای هر یک از پنج برند مورد بررسی در دو بازار شیر و پنیر ارائه می‌شود و سپس مسیرهای پویای سهم بازار آن‌ها تحلیل می‌گردد. منظور از پارامترهای برآوردشده مدل، مقادیر عددی ضرایب ساختاری مدل است که رفتار سیستم را در طول زمان تعیین می‌کنند؛ این پارامترها شامل ضریب اثربخشی تبلیغات جذب (I_i)، ضریب اثربخشی تبلیغات نگهداشت (γ_i)، نرخ ریزش پایه مشتریان (α_i)، ضرایب هزینه درجه‌دو تبلیغات (ϵ_{1i} و ϵ_{2i}) و نرخ تنزیل (ρ_i) هستند که با استفاده از داده‌های واقعی فروش، هزینه‌های تبلیغاتی و اطلاعات مالی برآورد شده‌اند. برای استخراج این پارامترها، داده‌های تاریخی مربوط به دوره ۱۴۰۱ تا ۱۴۰۳ بر مدل ویدال-ولف تعمیم‌یافته برازش داده شد. فرایند برآورد با استفاده از روش حداقل مربعات غیرخطی و الگوریتم لئونبرگ-مارکوارت^۱ انجام گرفت تا بهترین مقادیر پارامترها به‌گونه‌ای تعیین شود که اختلاف بین مقادیر مشاهده‌شده و مقادیر پیش‌بینی‌شده مدل حداقل گردد.

^۱ Levenberg-Marquardt

یک روش تکراری برای حل مسائل کمترین مربعات غیرخطی است که با ترکیب ایده گرادینان نزولی و نیوتن-گائوس-نیوتن، هم پایداری خوبی دارد و هم معمولاً همگرایی سریعی دارد (نوسدل و رایت، ۲۰۰۶)

جدول ۲. پارامترهای برآوردی مدل برای برندهای لبنیات در دو محصول شیر و پنیر

برند	محصول	r_i	α_i	γ_i	ϵ_{1i}	ϵ_{2i}	π_i	ρ_i	N_i
۱	شیر	۰/۴۸	۰/۱۱	۰/۰۸۵	۲/۳	۱/۶	۳/۵	۰/۰۲۱	۴۶۵
	پنیر	۰/۴۴	۰/۱۳	۰/۰۸۰	۲/۸	۲/۰	۵/۲	۰/۰۲۱	۱۹۲
۲	شیر	۰/۴۱	۰/۱۴	۰/۰۷۵	۲/۶	۱/۸	۳/۰	۰/۰۲۱	۳۹۵
	پنیر	۰/۳۸	۰/۱۵	۰/۰۷۰	۳/۱	۲/۲	۴/۶	۰/۰۲۲	۱۶۲
۳	شیر	۰/۳۵	۰/۱۷	۰/۰۶۵	۳/۰	۱/۲	۲/۷	۰/۰۲۳	۲۹۵
	پنیر	۰/۳۱	۰/۱۹	۰/۰۶۰	۳/۶	۲/۶	۴/۰	۰/۰۲۳	۱۲۲
۴	شیر	۰/۳۸	۰/۱۵	۰/۰۷۰	۲/۸	۱/۹	۲/۹	۰/۰۲۲	۳۳۵
	پنیر	۰/۳۴	۰/۱۷	۰/۰۶۵	۳/۴	۲/۴	۳/۴	۰/۰۲۲	۱۴۲
۵	شیر	۰/۳۳	۰/۱۹	۰/۰۶۰	۳/۳	۲/۳	۲/۵	۰/۰۲۳	۲۶۵
	پنیر	۰/۲۹	۰/۲۱	۰/۰۵۵	۳/۸	۲/۸	۳/۷	۰/۰۲۴	۱۰۵

در این مدل، π_i سود برحسب میلیون ریال، ρ_i نرخ ماهانه و N_i مقدار تولید یا تقاضا برحسب هزار تن را نشان می‌دهد.

پارامترهای برآوردی در جدول (۲) نشان می‌دهند برند ۱ هر دو بازار شیر و پنیر از قدرت برند بالاتری برخوردار است؛ به‌گونه‌ای که بیشترین اثربخشی تبلیغات و کمترین نرخ ریزش مشتری را دارد و در نتیجه موقعیت رهبری خود را بهتر حفظ می‌کند. در مقابل، برندهای کوچک‌تر مانند برند ۵ هم قدرت جذب پایین‌تری دارند و هم با ریزش بیشتری مواجه‌اند. همچنین حاشیه سود پنیر به دلیل ارزش افزوده بالاتر، بیشتر از شیر است، در حالی که بازار شیر به دلیل مصرف روزانه خانوارها گسترده‌تر باقی می‌ماند. تفاوت ضرایب هزینه نیز بیانگر مزیت صرفه‌جویی مقیاس برای برندهای بزرگ‌تر است. در ادامه سهم بازار اولیه $x_i(0)$ از داده‌های فروش واقعی فروردین ۱۴۰۱ استخراج شده و سهم نهایی $x_i(T)$ با حل عددی سیستم معادلات دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی محاسبه شده است. میانگین رشد ماهانه (درصد) از شیب خط روند ۳۶ ماه به‌دست آمده است.

جدول ۳. روند سهم بازار برندها در دوره سه‌ساله (۱۴۰۱-۱۴۰۳)

برند	محصول	$x_i(0)$	$x_i(T)$	تغییر مطلق	میانگین رشد ماهانه	انحراف معیار
۱	شیر	۰/۲۸۵	۰/۲۹۷	۰/۰۱۲	۰/۱۱۷۹	۰/۰۰۳۶
	پنیر	۰/۳۲۵	۰/۳۳۷	۰/۰۱۲	۰/۱۰۳۶	۰/۰۰۳۶
۲	شیر	۰/۲۴۲	۰/۲۴۳	۰/۰۰۱	۰/۰۱۱۸	۰/۰۰۰۳
	پنیر	۰/۲۱۸	۰/۲۲۶	۰/۰۰۸	۰/۱۰۳۰	۰/۰۰۲۴
۳	شیر	۰/۱۸۱	۰/۱۷۹	-۰/۰۰۲	-۰/۰۳۱۷	۰/۰۰۰۶
	پنیر	۰/۱۶۴	۰/۱۵۱	-۰/۰۱۳	-۰/۲۳۵۷	۰/۰۰۳۹
۴	شیر	۰/۲۰۵	۰/۲۰۲	-۰/۰۰۳	-۰/۰۴۲۱	۰/۰۰۰۹
	پنیر	۰/۱۹۱	۰/۱۹۲	۰/۰۰۱	۰/۰۱۴۹	۰/۰۰۰۳
۵	شیر	۰/۰۸۷	۰/۰۷۹	-۰/۰۰۸	-۰/۲۷۵۲	۰/۰۰۲۴
	پنیر	۰/۱۰۲	۰/۰۹۴	-۰/۰۰۸	-۰/۲۳۳۱	۰/۰۰۲۴

نتایج جدول (۳) نشان می‌دهد تغییر سهم بازار برندها در قالب بازتوزیع سهم میان رقبای حاضر در بازار اتفاق افتاده است؛ به‌گونه‌ای که مجموع افزایش سهم برخی برندها با مجموع کاهش سهم سایر برندها برابر است. در بازار شیر،

برند ۱ با افزایش سهم از ۰/۲۸۵ به ۰/۲۹۷، بیشترین افزایش مطلق را تجربه کرده است. متوسط نرخ رشد ماهانه سهم این برند نیز حدود ۰/۱۱۸ درصد بوده است. برند ۲ افزایش اندکی در سهم بازار داشته، در حالی که سهم برندهای ۳، ۴ و ۵ کاهش یافته است. بیشترین نرخ کاهش ماهانه در بازار شیر متعلق به برند ۵، معادل حدود ۰/۲۷۵ درصد در ماه، بوده است.

به منظور ارزیابی دقت، پایداری و قدرت تعمیم مدل، عملکرد آن در دو دوره درون نمونه‌ای و برون نمونه‌ای بررسی شد؛ به طوری که ۲۴ ماه نخست برای برآورد و کالیبراسیون مدل و ۱۲ ماه پایانی (ماه‌های ۲۵ تا ۳۶) برای اعتبارسنجی برون نمونه‌ای در نظر گرفته شد. معیارهای MAE ، $RMSE$ ، ME ، $NRMSE$ و R^2 برای مقایسه مسیرهای پیش‌بینی شده و واقعی سهم بازار محاسبه شدند. نتایج جدول (۴) نشان می‌دهد که با وجود افزایش محدود خطاها در دوره برون نمونه‌ای، مدل همچنان از دقت، پایداری و قدرت تعمیم قابل قبولی برخوردار است.^۱

جدول ۴. ارزیابی مدل و اعتبار سنجی مسیر زمانی سهم بازار برندها (درون و برون نمونه‌ای)

برند	محصول	درون نمونه‌ای					برون نمونه‌ای				
		R^2	$NRMSE$	ME	$RMSE$	MAE	R^2	$NRMSE$	ME	$RMSE$	MAE
۱	شیر	۰/۶۲	۰/۷۸	۰/۰۸	۲/۶۸۰	۰/۹۲	۰/۹۵	۰/۱۰	۳/۲۶۵	۰/۸۶	۰/۷۶
	پنیر	۰/۷۱	۰/۸۹	-۰/۰۵	۲/۶۸۹	۰/۹۱	۱/۰۶	-۰/۰۷	۳/۲۰۲	۰/۸۴	۰/۸۴
۲	شیر	۰/۵۵	۰/۶۹	۰/۰۴	۲/۸۴۵	۰/۹۰	۰/۸۶	۰/۰۵	۳/۵۴۶	۰/۸۳	۰/۶۸
	پنیر	۰/۶۴	۰/۸۱	۰/۰۹	۳/۶۴۹	۰/۸۹	۰/۹۵	۰/۱۱	۴/۲۷۹	۰/۸۱	۰/۷۵
۳	شیر	۰/۴۸	۰/۶۱	-۰/۰۶	۳/۳۸۹	۰/۸۸	۰/۷۸	-۰/۰۸	۴/۳۳۳	۰/۸۰	۰/۶۱
	پنیر	۰/۵۹	۰/۷۴	-۰/۰۴	۴/۶۹۸	۰/۸۷	۰/۸۸	-۰/۰۶	۵/۵۸۷	۰/۷۸	۰/۶۹
۴	شیر	۰/۵۳	۰/۶۷	۰/۰۱	۳/۲۹۲	۰/۹۰	۰/۸۳	۰/۰۲	۴/۰۷۹	۰/۸۲	۰/۶۵
	پنیر	۰/۵۶	۰/۷۲	۰/۰۳	۳/۷۶۰	۰/۸۸	۰/۸۵	۰/۰۴	۴/۴۳۹	۰/۸۰	۰/۶۷
۵	شیر	۰/۳۷	۰/۴۹	-۰/۰۷	۵/۹۰۴	۰/۸۵	۰/۶۱	-۰/۰۹	۷/۳۴۹	۰/۷۶	۰/۴۶
	پنیر	۰/۴۳	۰/۵۶	-۰/۰۳	۵/۷۱۴	۰/۸۶	۰/۶۶	-۰/۰۲	۶/۷۳۵	۰/۷۷	۰/۵۱
همه مسیرها		۰/۵۴۸	۰/۷۰۵	۰/۰۰	۳/۵۲۶	۰/۸۸۹	۰/۶۶۲	۰/۸۵۳	۴/۲۶۳	۰/۸۱	۰/۶۶۲

مقادیر MAE ، $RMSE$ و ME برحسب «واحد درصد» بیان شده‌اند

نتایج اعتبارسنجی نشان می‌دهد که خطای مدل در دوره برون نمونه‌ای نسبت به دوره درون نمونه‌ای افزایش محدودی داشته است؛ به گونه‌ای که $RMSE$ کلی از ۰/۷۰۵ به ۰/۸۵۳ و MAE از ۰/۵۴۸ به ۰/۶۶۲ افزایش یافته است.

۳-۵. بودجه بهینه تبلیغاتی و ارزش سایه‌ای سهم بازار

بودجه بهینه از شرایط لازم بهینگی استخراج شده است که برای تبلیغات جذب و برای نگهداشت رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود. متغیر کمکی $\lambda_i(t)$ از حل معادله دیفرانسیل پسر^۲ به دست می‌آید.

^۱ یکی از مزیت‌های نظری مدل توسعه‌یافته در این پژوهش نسبت به مدل‌های پایه نظیر مدل کلاسیک ویدال-ولف، لحاظ کردن تفکیک ساختاری میان هزینه‌های جذب و نگهداشت مشتری است. در حالی که مدل ویدال-ولف فرض می‌کند کل بودجه تبلیغاتی با یک نرخ ثابت به افزایش فروش منجر می‌شود، تفکیک صورت گرفته در این مطالعه امکان محاسبه ارزش طول عمر مشتری و دوره بازگشت سرمایه را به طور مجزا برای هر استراتژی فراهم کرده است. با این حال، مقایسه آماری و اقتصادسنجی دقیق قدرت پیش‌بینی (نظیر ارزیابی R^2 و $RMSE$) بین مدل کلاسیک و مدل تفکیک‌شده حاضر، مستلزم دسترسی به داده‌های سری زمانی طولانی‌تر و ارزیابی برون نمونه‌ای است که به عنوان یکی از محدودیت‌های تحقیق حاضر، می‌تواند در مطالعات آتی مورد توجه پژوهشگران قرار گیرد.

^۲ Backward Differential Equation

معادله‌ای است که مقدار متغیر یا مشتق آن در زمان t به مقادیر آینده همان متغیر مانند $t + \Delta t$ وابسته است و بنابراین از نظر زمانی به سمت جلو تعریف می‌شود اما حل آن به صورت پسر^۲ انجام می‌گیرد (یانگ و ژو، ۱۹۹۹)

جدول ۵. ترکیب بودجه بهینه تبلیغاتی و نسبت جذب به نگهداشت (میانگین ماهانه-میلیارد ریال)

برند	محصول	بودجه جذب	بودجه نگهداشت	کل بودجه	هزینه به ازای ۱ درصد سهم
۱	شیر	۵/۲	۲/۳	۷/۵	۲۳/۶
	پنیر	۳/۵	۱/۶	۵/۱	۱۴/۳
۲	شیر	۱/۴	۱/۸	۳/۲	۲۲/۶
	پنیر	۲/۸	۱/۲	۴/۰	۱۶/۷
۳	شیر	۳/۰	۱/۳	۴/۳	۲۲/۴
	پنیر	۱/۹	۰/۹	۲/۸	۱۷/۴
۴	شیر	۳/۴	۱/۵	۴/۹	۲۲/۷
	پنیر	۲/۳	۱/۰	۳/۳	۱۶/۳
۵	شیر	۲/۴	۱/۰	۳/۴	۴۰/۰
	پنیر	۱/۶	۰/۷	۲/۳	۲۳/۵

اعداد گزارش شده میانگین زمانی ۳۶ ماه هستند.

نتایج جدول (۵) نشان می‌دهد ترکیب بهینه بودجه تبلیغات در بازار لبنیات ایران حدود ۷۰ درصد برای جذب مشتری و ۳۰ درصد برای نگهداشت است؛ الگویی که با ظرفیت رشد بازار و توصیه‌های ادبیات بازاریابی همخوانی دارد. با این حال، هزینه واقعی رقابت میان برندها متفاوت است. برند ۱ به دلیل مقیاس بزرگ‌تر و قدرت برند، با هزینه کمتری به ازای هر واحد سهم بازار عمل می‌کند، در حالی که برندهای کوچک‌تر مانند برند ۵ برای حفظ یا افزایش سهم خود ناچار به صرف هزینه بسیار بیشتری هستند. همچنین تفاوت‌های جزئی در ترکیب بودجه نشان می‌دهد هر برند متناسب با نرخ ریزش مشتری و موقعیت رقابتی خود، تنظیمات متفاوتی در استراتژی تبلیغاتی انجام می‌دهد. در ادامه متغیر کمکی $\lambda_i(t)$ از حل معادله دیفرانسیل پسرو با شرط پایانی $\lambda_i(T) = 0$ محاسبه می‌شود. این متغیر نشان‌دهنده ارزش حال تخفیف‌یافته یک واحد افزایش در سهم بازار در زمان t است.

جدول ۶. مسیر ارزش سایه‌ای سهم بازار در طول افق برنامه‌ریزی (میلیارد ریال)

برند	محصول	$\lambda_i(0)$ اولیه	$\lambda_i(T/2)$ میانه دوره	میانگین $\bar{\lambda}_i$	نرخ کاهش ماهانه
۱	شیر	۱۴/۲	۹/۱	۷/۷	-۰/۳۹۴
	پنیر	۲۰/۵	۱۳/۱	۱۱/۱	-۰/۵۶۹
۲	شیر	۱۲/۵	۸/۰	۶/۸	-۰/۳۴۷
	پنیر	۱۸/۲	۱۱/۶	۹/۹	-۰/۵۰۶
۳	شیر	۱۱/۳	۷/۲	۶/۱	-۰/۳۱۴
	پنیر	۱۶/۰	۱۰/۲	۸/۷	-۰/۴۴۴
۴	شیر	۱۱/۸	۷/۵	۶/۴	-۰/۳۲۸
	پنیر	۱۶/۹	۱۰/۸	۹/۲	-۰/۴۶۹
۵	شیر	۱۰/۴	۶/۶	۵/۶	-۰/۲۸۹
	پنیر	۱۴/۸	۹/۴	۸/۰	-۰/۴۱۱

نرخ کاهش ماهانه از شیب خط روند $\lambda_i(t)$ استخراج شده است.

ارزش سایه‌ای نشان می‌دهد یک درصد افزایش سهم بازار چه ارزشی برای برند دارد. بر اساس جدول (۶) در ابتدای دوره، این مقدار برای برند ۱ پنیر ۲۰/۵ میلیارد ریال و در شیر ۱۴/۲ میلیارد ریال است؛ یعنی پنیر حدود ۴۵ درصد ارزشمندتر است. این ارزش به‌صورت خطی کاهش می‌یابد و برای برند ۱ پنیر هر ماه حدود ۰/۵۷ میلیارد ریال افت می‌کند؛ به‌طوری‌که در میانه دوره به ۱۳/۱ میلیارد و در پایان به صفر می‌رسد. نسبت ارزش سایه‌ای پنیر به شیر برای

تمام برندها تقریباً ۱/۴۰ تا ۱/۴۵ است و میانگین ارزش سایه‌ای برند ۱ پنیر ۱۱/۱ میلیارد در مقابل ۷/۷ میلیارد در شیر بیشترین مقدار در بین برندها است. برند ۵ با میانگین ۸/۰ میلیارد ریال در پنیر و ۵/۶ میلیارد ریال در شیر در پایین‌ترین سطح قرار دارد که بازتاب‌دهنده ریزش بیشتر و حاشیه سود کمتر این برند است.

شاخص‌های عملکرد و بازگشت سرمایه تبلیغاتی: شاخص ROI از نسبت سود حاصل از افزایش سهم ($\Delta x_i \times$ $N_i \times \pi_i$) به کل بودجه تبلیغاتی محاسبه شده است. CAC (هزینه جذب مشتری) از تقسیم بودجه جذب بر تعداد مشتریان جدید و CLV (ارزش طول عمر مشتری) از حاشیه سود سالانه تقسیم بر نرخ ریزش بدست می‌آید. نرخ ریزش مؤثر (ECR^1) شامل اثر تبلیغات نگهداشت است که برابر $\alpha_i^{eff} = \alpha_i - \gamma_i \cdot u_{2i}^*/x_i$ است.

جدول ۷. شاخص‌های عملکرد تبلیغاتی و ارزش مشتری (میانگین سه‌ساله)

برند	محصول	ROI	CAC	CLV	CLV/CAC	دوره بازگشت	ECR
۱	شیر	۲/۳۵	۴۸۵	۳۸/۲	۷۸/۸	۱۵/۲	۰/۰۷۶
	پنیر	۳/۱۲	۳۶۰	۴۸/۵	۱۳۴/۷	۸/۹	۰/۰۹۱
۲	شیر	۲/۰۸	۵۴۵	۳۲/۱	۵۸/۹	۲۰/۴	۰/۰۹۸
	پنیر	۲/۷۵	۴۲۰	۴۱/۴	۹۸/۶	۱۲/۲	۰/۱۰۸
۳	شیر	۱/۹۲	۵۹۰	۲۷/۶	۴۶/۸	۲۵/۶	۰/۱۲۳
	پنیر	۲/۴۱	۴۸۵	۳۴/۸	۷۱/۸	۱۶/۷	۰/۱۳۹
۴	شیر	۲/۱۵	۵۶۰	۲۹/۰	۵۱/۸	۲۳/۲	۰/۱۰۷
	پنیر	۲/۶۳	۴۳۵	۳۹/۱	۸۹/۹	۱۳/۳	۰/۱۲۲
۵	شیر	۱/۶۵	۶۷۵	۲۲/۷	۳۳/۶	۳۵/۷	۰/۱۴۲
	پنیر	۲/۱۸	۵۴۰	۲۹/۸	۵۵/۲	۲۱/۷	۰/۱۵۸

CAC

برحسب هزار ریال، CLV برحسب میلیون ریال و شاخص بازگشت سرمایه برحسب ماه است.

شاخص‌های عملکرد نشان می‌دهند برندهای قوی بازدهی بسیار بالاتری از تبلیغات و جذب مشتری دارند. برند ۱ پنیر با شاخص ROI برابر ۳/۱۲ تقریباً دو برابر برند ۲ شیر (۱/۶۵) بازده ایجاد می‌کند و حتی در شیر نیز با ۲/۳۵ از بیشتر رقبا بهتر است. نسبت CLV/CAC نیز این برتری را تأیید می‌کند؛ برند ۱ پنیر با عدد استثنایی ۱۳۴/۷ نشان می‌دهد ارزش هر مشتری ۱۳۵ برابر هزینه جذب است، در حالی که برند ۵ شیر تنها ۳۳/۶ دارد. دوره بازگشت سرمایه نیز حدوداً برای برند ۱ پنیر ۹ ماه و برای برند ۵ شیر ۳۶ ماه است که نشان‌دهنده ریسک بالاتر برندهای کوچک‌تر است. در نرخ ریزش مؤثر نیز برند ۱ توانسته ریزش شیر را از ۰/۱۱ به ۰/۰۷۶ کاهش دهد، در حالی که برند ۵ پنیر تنها از ۰/۲۱ به ۰/۱۵۸ رسیده است. در مجموع، تقریباً همه شاخص‌ها در پنیر بهترند؛ به‌طور میانگین ROI حدود ۳۰ درصد، نسبت CLV/CAC حدود ۶۰ درصد و دوره بازگشت حدود ۴۰ درصد بهبود دارد و این توجهی روشن برای جذابیت اقتصادی بالاتر این بازار است.

¹ Effective Churn Rate

۵-۴. سناریوهای رقابتی و شبیه‌سازی تصمیمات استراتژیک

برای ارزیابی پایداری استراتژی‌های بهینه در برابر شوک‌های بازار، سه سناریوی کلیدی شبیه‌سازی شده است. هر سناریو با تغییر پارامترهای مدل و حل مجدد سیستم کنترل بهینه اجرا شده است.

سناریوی اول: ورود رقیب جدید با بودجه تهاجمی: در این سناریو فرض شده رقیبی با سرمایه‌گذاری تبلیغاتی ۶۰ درصد بالاتر از میانگین صنعت وارد بازار شده است. اثر ورود به صورت کاهش موقت پارامتر r_i (به دلیل اشباع رسانه‌ای) و افزایش α_i (به دلیل جذابیت محصول جدید) مدل‌سازی شده است.^۱

جدول ۸. واکنش بهینه به ورود رقیب جدید با بودجه تهاجمی

برند	محصول	کاهش سهم اولیه	بازتخصیص بودجه	افزایش جذب	کاهش نگهداشت	زمان بازبازی	هزینه دفاعی
۱	شیر	-۱/۸	۱۳/۲	۲۲/۵	۱۲/۸	۱۴	۱۲/۶
	پنیر	-۲/۱	۱۵/۸	۲۶/۰	۱۵/۲	۱۵	۹/۷
۲	شیر	-۲/۵	۱۶/۴	۲۸/۵	۱۸/۱	۱۶	۱۱/۶
	پنیر	-۲/۹	۱۸/۷	۳۱/۲	۲۰/۵	۱۷	۹/۰
۳	شیر	-۳/۲	۱۹/۵	۳۲/۸	۲۲/۳	۱۷	۱۰/۰
	پنیر	-۳/۷	۲۰/۹	۳۴/۵	۲۳/۸	۱۸	۷/۰
۴	شیر	-۲/۸	۱۷/۳	۲۹/۶	۱۹/۲	۱۶	۱۰/۱
	پنیر	-۳/۳	۱۹/۲	۳۲/۰	۲۱/۵	۱۷	۷/۶
۵	شیر	-۴/۱	۲۰/۸	۳۴/۰	۲۳/۵	۱۹	۸/۵
	پنیر	-۴/۸	۲۱/۵	۳۵/۲	۲۴/۳	۲۰	۵/۹

کاهش سهم اولیه، بازتخصیص بودجه، افزایش جذب و کاهش نگهداشت بر حسب درصدریال زمان بازبازی بر حسب ماه و هزینه دفاعی بر حسب میلیاردریال می‌باشد.

بر اساس نتایج جدول (۸) ورود رقیب جدید بیشترین فشار را به برندهای کوچک وارد می‌کند؛ برند ۵ پنیر حدود ۵ درصد سهم از دست می‌دهد، در حالی که کاهش برند ۱ شیر تنها ۱/۸ درصد است. واکنش بهینه همه برندها افزایش بودجه تبلیغاتی است: برند ۱ باید بودجه را ۱۳/۲ درصدی بیشتر و سهم تبلیغات جذب را از ۶۹/۳ درصد به حدود ۸۵ برساند، اما برند ۵ ناچار به افزایش سنگین‌تر ۲۰/۸ درصد است. زمان بازبازی نیز متفاوت است؛ برند ۱ طی ۱۴ ماه سهم از دست‌رفته را جبران می‌کند، در مقابل برند ۵ حدود ۲۰ ماه زمان نیاز دارد. هزینه دفاعی برند ۱ شیر طی دوره ۱۲/۶ میلیارد ریال است که حدود ۱۲ درصد بودجه سالانه آن محسوب می‌شود.

سناریوی دوم: تحلیل جنگ قیمت-مبادله سهم و سودآوری: در این سناریو فرض شده یک رقیب اصلی (برند ۲) قیمت را ۱۵ درصد کاهش داده و این شوک به صورت افزایش r_i رقیب و کاهش π_i برای تمام بازیکنان مدل شده است.

^۱ برای تبدیل شوک‌های بیرونی به تغییرات پارامتری در مدل کنترل بهینه، از رویکرد کالبراسیون مبتنی بر ادبیات استفاده شده است. ورود رقیب با بودجه $A^* = 1.6\bar{A}$ دو اثر همزمان ایجاد می‌کند: نخست، کاهش نرخ بازگشت تبلیغات (r_i) به دلیل اشباع رسانه‌ای که بر اساس رابطه دورفمن-اشتاينر تعمیم‌یافته (۱۹۵۴) و شواهد دوق و همکاران (۲۰۰۵) به صورت $\Delta r_i = -\beta_1$ به صورت $\Delta \alpha_i \approx -0.47\beta_1 \ln(A^*/\bar{A})$ می‌شود؛ دوم، افزایش نرخ ریزش مشتری (α_i) از طریق ضریب cross-brand switching برآورده شده در مدل GARCH به صورت $\Delta \alpha_i = 1.6\gamma_i$ است. مقادیر β_1 و γ_i از برآورد تجربی جدول (۴) استخراج شده و با جایگذاری در شرایط بهیگی مدل (معادله ۱۲)، بازتخصیص بهینه بودجه و زمان بازبازی محاسبه گردیده‌اند.

جدول ۹. واکنش بهینه به جنگ قیمت-مبادله سهم و سودآوری

برند	محصول	واکنش استراتژی	افزایش سهم	کاهش حاشیه	تغییر سود خالص	شکست ROI	توصیه
۱	شیر	تطبیق ۸	-۱۷/۳	-۱۶/۸	۱/۲	۲۸	عدم ورود
	پنیر	تطبیق ۱۰	۱۸/۵	-۱۷/۴	۱/۵	۲۶	عدم ورود
۲	شیر	آغازگر	-۲۲/۰	-۱۹/۸	۲/۷	۳۲	محدود کردن
	پنیر	آغازگر	-۲۳/۸	-۲۱/۲	۳/۱	۳۱	محدود کردن
۳	شیر	تطبیق ۱۲	-۱۹/۲	-۱۷/۷	۱/۸	۳۰	انتخابی
	پنیر	تطبیق ۱۴	-۲۰/۶	-۱۸/۹	۲/۱	۲۹	انتخابی
۴	شیر	تطبیق ۱۰	۱۸/۵	-۱۷/۲	۱/۶	۲۹	عدم ورود
	پنیر	تطبیق ۱۲	-۱۹/۸	-۱۸/۲	۱/۹	۲۸	عدم ورود
۵	شیر	تطبیق ۱۵	-۲۱/۵	-۱۹/۸	۲/۰	۳۳	اجتناب
	پنیر	تطبیق ۱۵	-۲۲/۸	-۲۰/۹	۲/۳	۳۴	اجتناب

واکنش استراتژی، افزایش سهم، کاهش حاشیه و تغییر سود خالص بر حسب درصد و شکست ROI برحسب ماه است. شبیه‌سازی جدول (۹) نشان می‌دهد جنگ قیمت تقریباً همیشه زیان‌آور است. در سناریوی کاهش ۱۵ درصدی قیمت توسط برند ۲ و واکنش ۸ درصدی برند ۱، سهم برند ۱ فقط ۱۷/۳ درصد کمتر می‌شود و حاشیه سودش ۱۸/۸ درصد افت می‌کند و در مجموع ۱/۲ درصد کاهش سود دارد؛ برند ۲ نیز با کاهش ۲۲/۰۷ درصد سهم، به دلیل افت ۱۹/۸ درصد حاشیه، حدود ۲/۷ درصد زیان می‌بیند. دوره شکست ROI نیز بسیار طولانی یعنی حدود ۲۸ ماه برای برند ۱ و ۳۲ ماه برای برند ۲ است. برندهای کوچک‌تر مانند برند ۵ در صورت کاهش ۱۵ درصد قیمت، حدود ۲/۳ درصد سود از دست می‌دهند و عملاً وارد محدوده زیان می‌شوند. بنابراین بهترین استراتژی برای برندهای بزرگ «عدم ورود» و برای برندهای کوچک «اجتناب کامل» از جنگ قیمت است.

سناریوی سوم: افزایش هزینه رسانه‌های سنتی-مهاجرت به کانال‌های دیجیتال: در این سناریو فرض شده هزینه رسانه‌های سنتی (تلویزیون و بیلبرد) ۲۵ درصد افزایش یافته است که به صورت کاهش ضریب اثربخشی ϵ برای بودجه صرف‌شده در این کانال‌ها مدل شده است.

جدول ۱۰. تأثیر افزایش هزینه رسانه‌های سنتی-مهاجرت به کانال‌های دیجیتال

برند	محصول	کاهش بودجه سنتی	افزایش بودجه دیجیتال	تغییر ترکیب کانال	افزایش اثربخشی	صرفه‌جویی هزینه
۱	شیر	-۲۶/۳	۵۸/۷	۶۱ ← ۴۵	۸/۲	۲/۴
	پنیر	-۲۸/۵	۶۲/۱	۶۵ ← ۴۸	۹/۱	۱/۸
۲	شیر	-۲۴/۱	۵۵/۲	۵۸ ← ۴۲	۷/۵	۲/۱
	پنیر	-۲۷/۳	۶۰/۵	۶۳ ← ۴۶	۸/۶	۱/۶
۳	شیر	-۲۸/۷	۶۳/۴	۵۵ ← ۳۸	۹/۳	۱/۹
	پنیر	-۳۰/۹	۶۶/۸	۶۰ ← ۴۱	۱۰/۵	۱/۴
۴	شیر	-۲۵/۶	۵۷/۰	۵۷ ← ۴۰	۷/۸	۲/۰
	پنیر	-۲۹/۲	۶۴/۳	۶۲ ← ۴۴	۹/۴	۱/۵
۵	شیر	-۲۷/۸	۶۱/۵	۵۲ ← ۳۵	۸/۹	۱/۶
	پنیر	-۳۱/۴	۶۸/۲	۵۶ ← ۳۸	۱۱/۱	۱/۱

کاهش بودجه سنتی، افزایش بودجه دیجیتال، تغییر ترکیب کانال و افزایش اثربخشی کل برحسب درصد و صرفه‌جویی هزینه برحسب میلیارد ریال است.

نتایج جدول (۱۰) نشان می‌دهد افزایش هزینه رسانه‌های سنتی، برندها را به سمت تبلیغات دیجیتال سوق می‌دهد؛ زیرا دیجیتال هم ارزان‌تر است و هم هدف‌گیری و سنجش‌پذیری بهتری دارد. برند ۱ شیر با کاهش ۳/۲۶ درصد بودجه سنتی و افزایش ۷/۵۸ درصد بودجه دیجیتال، سهم دیجیتال را از ۴۵ درصد به ۶۱ درصد می‌رساند؛ نتیجه آن ۴/۲ میلیارد ریال صرفه‌جویی و ۲/۸ درصد افزایش اثربخشی است. برندهای کوچک‌تر مانند برند ۵ پنیر مهاجرت شدیدتری دارند: کاهش ۴/۳۱ درصد سنتی و افزایش ۲/۶۸ درصد دیجیتال، با ۱/۱۱ درصد رشد اثربخشی. در پنیر، به دلیل مخاطب هدف دقیق‌تر، سهم دیجیتال برند ۱ به ۶۵ درصد می‌رسد. این تغییر، هزینه را کنترل و عملکرد کمپین را تقویت می‌کند.

در یک جمع‌بندی برای ارزیابی استحکام سیاست‌های بهینه در برابر شوک‌های بازار، سه سناریوی رقابتی شامل ورود رقیب جدید، جنگ قیمت و افزایش هزینه رسانه‌های سنتی و مهاجرت به رسانه‌های دیجیتال شبیه‌سازی شد. در هر سناریو، پارامترهای مربوط به شوک تغییر داده شد و سیستم کنترل بهینه مجدداً حل گردید. نتایج نشان داد که ورود رقیب جدید با بودجه‌ای ۶۰ درصد بالاتر از میانگین صنعت، موجب کاهش ۱/۸ تا ۴/۸ درصدی سهم اولیه برندهای موجود و افزایش ۱۳/۲ تا ۲۱/۵ درصدی بودجه بهینه آن‌ها می‌شود. در سناریوی جنگ قیمت، کاهش ۱۵ درصدی قیمت برند ۲ با کاهش ۱۶/۸ تا ۲۱/۹ درصدی سود خالص در برخی موارد همراه بود. همچنین، افزایش ۲۵ درصدی هزینه رسانه‌های سنتی، انتقال بودجه به رسانه دیجیتال و افزایش ۷/۵ تا ۱۱/۱ درصدی اثربخشی کل تبلیغات را به دنبال داشت.

۶. بحث، نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۶-۱. بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که الگوهای بهینه‌سازی بودجه تبلیغاتی در صنعت لبنیات ایران با مبانی نظری و نتایج مطالعات تجربی بین‌المللی همخوانی قابل‌توجهی دارد؛ هرچند شدت اثرات و دامنه نوسان پارامترها در ایران به دلیل ویژگی‌های ساختاری بازار به مراتب عمیق‌تر است. نسبت بهینه ۷۰ به ۳۰ (تخصیص ۷۰ درصد بودجه به جذب و ۳۰ درصد به نگهداشت) برای رهبران بازار، با نتایج سریرام و همکاران (۲۰۱۵) که نسبت ۶۵ به ۳۵ را بهینه برآورد کرده بودند سازگار است. با این حال، تفاوت میان موقعیت رهبران و پیروان در بازار ایران بسیار شدیدتر از الگوهای بین‌المللی مشاهده شد؛ به گونه‌ای که مدل حاضر نسبت متوازن ۵۰ به ۵۰ را برای پیروان بازار توصیه می‌کند. این واگرایی معنی‌دار نشان می‌دهد که برندهای پیشرو به دلیل بهره‌مندی از آگاهی برند انباشته و شبکه‌های توزیع گسترده، از صرفه‌های ناشی از مقیاس در تبلیغات برخوردارند و می‌توانند بخش عمده منابع خود را صرف جذب مشتریان جدید و حفاظت از سهم بازار نمایند؛ درحالی که برندهای پیرو به دلیل محدودیت منابع مالی و هزینه بالای رقابت در فضای جذب، ناگزیرند نیمی از توان بازاریابی خود را بر حفظ هسته مشتریان وفادار و مهار نرخ ریزش متمرکز سازند. برآورد بازده سرمایه‌گذاری تبلیغاتی که دامنه‌ای برابر با ۱/۶۵ تا ۳/۱۲ را در میان برندهای مورد مطالعه نشان می‌دهد، با محدوده به‌دست‌آمده در پژوهش دینر و همکاران (۲۰۱۴) در بازارهای اروپایی همخوان است. در این میان، برند ۱ با دستیابی به بازدهی ۳/۱۲ در گروه برندهای با عملکرد ممتاز قرار می‌گیرد (مانند مطالعه لودیش و ملا، ۲۰۰۷) که بیانگر کارایی بالای سرمایه ناملموس و اثر فزاینده ارزش ویژه برند در تبدیل مخارج بازاریابی به سود عملیاتی است. در نقطه مقابل، برند ۵ با نرخ بازده ۱/۶۵ در آستانه سودآوری قرار دارد؛ سطحی که سرینیواسان و همکاران (۲۰۱۴) آن را حداقل نقطه توجیه‌پذیری سرمایه‌گذاری معرفی کرده‌اند و نشان می‌دهد که بدون بازآرایی استراتژی‌های ترویجی و اصلاح آمیخته بازاریابی، سرمایه‌گذاری تبلیغاتی در برندهای ضعیف‌تر با ریسک عدم بازگشت روبه‌رو خواهد بود.

از سوی دیگر، نسبت ارزش دوره عمر مشتری به هزینه جذب در این مطالعه دامنه بسیار گسترده‌ای از ۶/۳۳ تا ۱۳۴/۷ را ثبت کرد. این دامنه تفاوت فاحشی با معیار مرجع ۱ به ۳ کومار و پیترسون (۲۰۱۲) و همچنین دامنه ۱ به ۵ تا ۱ به ۲۰ گزارش شده توسط گوپتا و زیتامل^۱ (۲۰۰۶) دارد. وسعت این شکاف نه تنها از عدم تقارن شدید اطلاعاتی و قدرت بازاری در صنعت لبنیات کشور پرده برمی‌دارد، بلکه نشان‌دهنده موانع ساختاری ورود و وجود وفاداری قفل شده در میان مصرف‌کنندگان برندهای برتر است که هزینه جذب را برای شرکت‌های نوپا به شدت افزایش و برای رهبران بازار به حداقل می‌رساند.

دوره بازگشت سرمایه تبلیغاتی برآوردشده (۹ تا ۳۶ ماه) نیز کاملاً با لیم^۲ و همکاران (۲۰۰۵) همخوانی دارد، اما نکته حائز اهمیت، تفاوت حدوداً ۲۷ ماهه بین دوره بین دو دسته محصول شیر و پنیر است. این تفاوت زمانی طولانی مشابه یافته‌های اتامن و همکاران (۲۰۱۰) برای محصولات با حاشیه سود بالاتر است؛ چراکه پنیر به عنوان یک محصول با درگیری بالاتر، تنوع بیشتر و حاشیه سود ناخالص بالاتر در مقایسه با شیر پاستوریزه (که کالایی همگن و مشمول نظارت قیمتی است)، سرعت و قابلیت بیشتری در بازیافت هزینه‌های تبلیغاتی دارد. همچنین، تفاوت معنادار در نرخ ریزش پایه مصرف‌کنندگان بین شیر (۰/۱۱) و پنیر (۰/۱۳)، با مدل‌های تجربی فیدر و هاردی^۳ (۲۰۱۰) مطابقت دارد و تأیید می‌کند که فرآورده‌های با حاشیه سود بیشتر به دلیل تمایز طعم، کیفیت و تنوع کاربرد، وفاداری ادراکی پایدارتری را در سبد خرید خانوار ایجاد می‌کنند. در بخش اثربخشی استراتژی‌های حفظ مشتری، مدل نشان داد که تبلیغات نگهداشت قادر است نرخ ریزش را برای برند ۱ تا ۳۰ درصد کاهش دهد که این نتیجه با یافته‌های ویلانوا و همکاران (۲۰۰۸) سازگار است. در مقابل، اثربخشی کمتر این راهبرد در برندهای کوچک‌تر، مبین آن است که موفقیت برنامه‌های نگهداشت به‌طور درون‌زا تابع سطح تداعی و شناخت برند است؛ امری که با چارچوب نظری کلر و لمن (۲۰۰۶) درباره نقش زیرساختی ارزش ویژه برند در ارتقای بازدهی ابزارهای ارتباطی همسویی دارد.

شبیه‌سازی سناریوی ورود رقیب جدید مشخص ساخت که دوره بازبایی سهم بازار برای رهبران بازار حدود ۱۴ ماه و برای پیروان ۲۰ ماه به طول می‌انجامد. این پویایی واکنشی با مدل بازی‌های تبلیغاتی دیفرانسیلی اریکسون^۴ (۲۰۰۶) انطباق دارد؛ جایی که توان مالی و زیرساخت توزیع رهبران به آنها اجازه می‌دهد ضربه رقابتی را سریع‌تر جذب کنند. در همین راستا، تغییر ترکیب بودجه به نفع فعالیت‌های جذب در شرایط تشدید رقابت، با توصیه‌های استراتژیک استینکمپ و گیسکنز (۲۰۱۴) کاملاً همسو است.

همچنین، تحلیل سناریوی جنگ قیمت نشان داد که اتخاذ رویکرد تخفیف‌های تهاجمی به افت شدید ۱۷ تا ۲۳ درصدی سودآوری در ازای رشد ناچیز ۱ تا ۳ درصدی سهم بازار منجر می‌شود. این یافته به روشنی هشدارهای اسلک^۵ (۱۹۹۷) و الیوادی^۶ و همکاران (۲۰۰۱) را تأیید می‌کند که ورود به رقابت قیمتی در بازارهای در حال بلوغ، بازی با جمع جبری منفی بوده و صرفاً ارزش تجمیعی صنعت را تخریب می‌سازد. در نهایت، شبیه‌سازی مهاجرت دیجیتال تا سقف ۶۸ درصد از کل بودجه تبلیغاتی نشان داد که این انتقال به کاهش ۵ تا ۸ درصدی هزینه‌ها و ارتقای ۸ تا ۱۱ درصدی اثربخشی کل می‌انجامد که این دستاورد نیز با شواهد تجربی وان (۲۰۲۳) و دینر و همکاران (۲۰۱۴) پیرامون بازدهی رسانه‌های نوین همخوانی دارد.

در مجموع، این پژوهش با بهره‌گیری از چارچوب کنترل بهینه، تصویری یکپارچه و چندبعدی از پویایی تبلیغات، نرخ‌های استهلاک پیام و الگوهای رقابت در صنعت لبنیات ایران ارائه کرد. نتایج به‌وضوح به اثبات رساند که تخصیص بهینه بودجه یک مفهوم ایستا و یکسان نیست، بلکه به‌طور همزمان به اندازه برند، موقعیت رقابتی، دسته محصول و اهداف

^۱ Gupta & Zeithaml

^۲ Lim

^۳ Fader & Hardie

^۴ Erickson

^۵ Slack

^۶ Ailawadi

استراتژیک بنگاه وابسته است. تفاوت بسیار بزرگ در نسبت ارزش دوره عمر مشتری به هزینه جذب میان رهبران و پیروان، بیانگر عدم تعادل ساختاری بازار و ضرورت اتخاذ رویکردهای تفکیک شده است.

۶-۲. پیشنهادات و محدودیت‌ها

بر اساس نتایج، رهبران بازار باید نسبت ۷۰ به ۳۰ را حفظ و بر تقویت وفاداری و مهاجرت تدریجی به دیجیتال تمرکز کنند. برندهای میان‌رده باید هویت ارزشمند بسازند، بودجه نگهداشت را به ۳۵-۴۰ درصد افزایش دهند و مهاجرت تهاجمی به دیجیتال داشته باشند. پیروها نیز باید نسبت را به ۵۰/۵۰ نزدیک کرده، تمرکز جغرافیایی و استراتژی «ارزش برای پول» را دنبال کنند و ۷۰-۸۰ درصد بودجه را به تبلیغات دیجیتال اختصاص دهند.

این پژوهش با محدودیت‌هایی همراه است که باید در تفسیر و تعمیم نتایج مورد توجه قرار گیرد. نخست، در مدل‌سازی حاضر از فرض توابع هزینه درجه دو استفاده شده است؛ هرچند این فرض در ادبیات کنترل بهینه مرسوم است، اما در عمل ممکن است ساختار هزینه‌های تبلیغاتی به شکل پله‌ای^۱ یا ناهموار باشد که مدل‌های غیرخطی پیچیده‌تری را می‌طلبد. دوم، این مطالعه رقابت را عمدتاً از طریق تغییرات پارامترهای هر برند به صورت مستقل و سهم بازار مدل‌سازی کرده است و اثرات تعاملی مستقیم میان برندها (نظیر کشش متقاطع تبلیغات و واکنش‌های استراتژیک همزمان) به دلیل محدودیت در درجات آزادی لحاظ نشده است. همچنین، محدودیت دسترسی به داده‌های تفکیک‌شده تبلیغاتی، امکان ارزیابی دقیق اثربخشی هریک از کانال‌های تبلیغاتی را کاهش داد. افزون بر این، برخی پارامترهای رفتاری و بازاری به منظور حفظ حل‌پذیری مدل در طول دوره مطالعه ثابت در نظر گرفته شدند، درحالی‌که ممکن است در عمل تغییر یابند. شوک‌های بیرونی ناگهانی، مانند نوسانات نرخ ارز، تغییر سیاست‌های اقتصادی و اختلالات زنجیره تأمین نیز به طور صریح در مدل لحاظ نشدند. از این رو، نسبت‌های پیشنهادی جذب و نگهداشت، از جمله نسبت ۷۰ به ۳۰ برای رهبران بازار و ۵۰ به ۵۰ برای برندهای پنی‌ر، و نیز تخصیص ۷۰ تا ۸۰ درصدی بودجه به تبلیغات دیجیتال، باید با احتیاط و متناسب با شرایط هر برند و تحولات بازار تفسیر و به کار گرفته شوند.^۲ استفاده از داده‌های تفصیلی‌تر، پارامترهای متغیر در زمان و لحاظ کردن شوک‌های بیرونی در پژوهش‌های آتی می‌تواند اعتبار و قابلیت تعمیم نتایج را افزایش دهد.

^۱ Step-wise

^۲ در نهایت، با توجه به اینکه تأمین داده‌های دقیق برای برندهای غیربورسی همواره با چالش همراه است، پیشنهاد می‌شود محققان در مطالعات آتی برای شرکت‌هایی با داده‌های محدود، از روش‌های جایگزین نظیر رویکردهای بی‌زی، تکنیک‌های تطبیق با برندهای مشابه بورسی، یا برآوردکننده‌های پانل دیتا در سطح صنعت (استفاده از متغیرهای جانشین یا ابزاری) برای تخمین پارامترهای پنهان استفاده نمایند.

منابع:

- Ailawadi, K. L., Lehmann, D. R., & Neslin, S. A. (2001). Market response to a major policy change in the marketing mix: Learning from Procter & Gamble's value pricing strategy. *Journal of Marketing*, 65(1), 44-61. <https://doi.org/10.1509/jmkg.65.1.44.18130>
- Albadvi, A., Nakhaei Kamalabadi, E., & Eshtiaghy, F. (2015). A robust optimization approach to optimal allocation of marketing budgets in maximizing the CE. *New Marketing Research Journal*, 5(1), 21-42. [In Persian]
- Asadollahi Dehkordi, E. (2024). Investigating the effects of artificial intelligence on optimizing marketing processes. *Advertising and Sales Management*, 5(4), 39-58. [In Persian]
- Ataman, M. B., Van Heerde, H. J., & Mela, C. F. (2010). The long-term effect of marketing strategy on brand sales. *Journal of Marketing Research*, 47(5), 866-882. <https://doi.org/10.1509/jmkr.47.5.866>
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441>
- Bruce, N. I., Peters, K., & Naik, P. (2012). Discovering how advertising grows sales and builds brands. *Journal of Marketing Research*, 49(6), 793-806. <https://doi.org/10.2307/41714469>
- Chen, H., Chen, Y.-J., Park, S.-H., & Shin, D. (2025). Multichannel advertising: Budget allocation in the presence of spillover and carryover effects. *Manufacturing & Service Operations Management*, 27(3). <https://doi.org/10.1287/msom.2023.0293>
- Danaher, P. J., & Dagger, T. S. (2013). Comparing the relative effectiveness of advertising channels: A case study of a multimedia blitz campaign. *Journal of Marketing Research*, 50(4), 517-534. <https://doi.org/10.1509/jmr.12.0241>
- de Moraes, L. K., da Silva Borges, D. A., Moreira, M. Â. L., Costa, I. P. de A., Fávero, L. P., & dos Santos, M. (2024). Differential evolution framework for budget optimization in marketing models with saturation and adstock effects. *Procedia Computer Science*, 242, 520-527. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2024.08.097>
- Dinner, I. M., Van Heerde, H. J., & Neslin, S. A. (2014). Driving online and offline sales: The cross-channel effects of traditional, online display, and paid search advertising. *Journal of Marketing Research*, 51(5), 527-545. <https://doi.org/10.1177/002224371305000507>
- Dorfman, R., & Steiner, P. O. (1954). Optimal advertising and optimal quality. *American Economic Review*, 44(5), 826-836.
- Dubé, J.-P., Hitsch, G. J., & Manchanda, P. (2005). An empirical model of advertising dynamics. *Quantitative Marketing and Economics*, 3(2), 107-144. <https://doi.org/10.2139/ssrn.478050>
- Erickson, G. M. (2006). An oligopoly model of dynamic advertising competition (SSRN Working Paper No. 952395). <https://doi.org/10.2139/ssrn.952395>
- Fader, P. S., & Hardie, B. G. S. (2010). Customer-base valuation in a contractual setting: The perils of ignoring heterogeneity. *Marketing Science*, 29(1), 85-93. <https://doi.org/10.1287/mksc.1080.0482>
- Farabi Brokerage. (2024, October 27). Analytical report on the dairy industry (Magzoun No. 16). <https://help.irfarabi.com/wp-content/uploads/2024/10/صنعت-لبنیات.pdf>
- Faris Hasnawi, A. A., Rahimi Kalor, H., Khodaynah, B., & Bashkough Ajirlu, M. (2025). Designing an optimal social media advertising model for B2B marketing in Iraq. *New Research in Islamic Human Studies*, 4(7), 1-20. <https://doi.org/10.22034/api.2026.2088857.1742> [In Persian]
- Faregh, S. A., & Bahlibahl, F. (2025). Evaluating the effectiveness of social media advertising service design on users' impulsive buying behavior on Digikala e-commerce platform. *Smart Marketing Management*, 6(3), 60-77. https://www.jnabm.ir/article_725131_en.html?lang=en [In Persian]
- Feichtinger, G., Hartl, R. F., & Sethi, S. P. (1994). Dynamic Optimal Control Models in Advertising: Recent Developments. *Management Science*, 40(2), 195-226. <http://www.jstor.org/stable/2632762>
- Guhl, D., Paetz, F., Wagner, U., et al. (2024). Predicting and optimizing marketing performance in dynamic markets. *OR Spectrum*, 46, 1-27. <https://doi.org/10.1007/s00291-024-00755-1>
- Gupta, S., & Zeithaml, V. A. (2006). Customer metrics and their impact on financial performance. *Marketing Science*, 25(6), 718-739. <https://doi.org/10.1287/mksc.1060.0221>
- Iran Dairy Industries Association. (2023). Annual report on milk consumption in Iran. Tehran: Iran Dairy Industries Association. Retrieved from <https://www.ir-dis.org/>
- Keller, K. L., & Lehmann, D. R. (2006). Brands and branding: Research findings and future priorities. *Marketing Science*, 25(6), 740-759. <https://doi.org/10.1287/mksc.1050.0153>
- Kumar, V., & Petersen, J. A. (2012). *Statistical methods in customer relationship management*. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118349212>

- Kumar, V., Aksoy, L., Donkers, B., Venkatesan, R., Wiesel, T., & Tillmanns, S. (2010). Undervalued or overvalued customers: Capturing total customer engagement value. *Journal of Service Research*, 13(3), 297-310. <https://doi.org/10.1177/1094670510375602>
- Li, A., & Kannan, P. K. (2014). Attributing conversions in a multichannel online marketing environment: An empirical model and a field experiment. *Journal of Marketing Research*, 51(1), 40-56. <https://doi.org/10.1509/jmr.13.0050>
- Li, M., Zhang, J., Alizadehsani, R., & Pławiak, P. (2024). A multi-channel advertising budget allocation using reinforcement learning and an improved differential evolution algorithm. *IEEE Access*, 12, 100559-100580. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3429359>
- Lim, J., Currim, I. S., & Andrews, R. L. (2005). Consumer heterogeneity in the longer-term effects of price promotions. *International Journal of Research in Marketing*, 22(4), 441-457. <https://doi.org/10.1016/j.ijresmar.2005.09.006>
- Lodish, L. M., & Mela, C. F. (2007). If brands are built over years, why are they managed over quarters? *Harvard Business Review*, 85(7-8), 104-112.
- Mela, C. F., Gupta, S., & Lehmann, D. R. (1997). The long-term impact of promotion and advertising on consumer brand choice. *Journal of Marketing Research*, 34(2), 248-261. <https://doi.org/10.2307/3151862>
- Messner, W., & Migliorini, M. (2024). Fifty shades of ads. The influence of cultural and institutional factors on television advertisement expenditure. *Journal of International Management*, 30(6), Article 101190. <https://doi.org/10.1016/j.intman.2024.101190>
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). Numerical optimization (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5>
- Ramdinpuui, O., Chaudhary, K., Gupta, S., & Bali, S. (2026). A generalized Vidale–Wolfe model on existing and new customers advertising strategy in a segmented market. *Results in Control and Optimization*, 22, 100673. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2026.100673>
- Reichheld, F.F. and Scheffer, P. (2000) E-Loyalty: Your Secret Weapon on the Web. *Harvard Business Review*, 78, 105-113.
- Reinartz, W., Thomas, J. S., & Kumar, V. (2005). Balancing acquisition and retention resources to maximize customer profitability. *Journal of Marketing*, 69(1), 63–79. <https://doi.org/10.1509/jmkg.69.1.63.55511>
- Sahni, N. S., Zou, D., & Chintagunta, P. K. (2017). Do targeted discount offers serve as advertising? Evidence from 70 field experiments. *Management Science*, 63(8), 2688-2705. <https://doi.org/10.1287/mnsc.2016.2450>
- Salehi, M., & Noori, M. (2017). Customer portfolio optimization in marketing budget allocation using data envelopment analysis and robust optimization. *Operations Management Research*, 13(4), 121-140. <http://jamlu.lahijan.iau.ir/article-1-1409-en.html> [In Persian]
- Sethuraman, R., Tellis, G. J., & Briesch, R. A. (2011). How well does advertising work? Generalizations from meta-analysis of brand advertising elasticities. *Journal of Marketing Research*, 48(3), 457-471. <https://doi.org/10.1509/jmkr.48.3.45>
- Shahbazi, H. (2018). Optimal generic milk advertising budget: Application of different allocation methods. *Agricultural Economics and Development*, 26(2), 217-244. <https://doi.org/10.30490/aead.2018.73561> [In Persian]
- Shahbazi, H. (2021). Optimal generic milk advertising budget: Application of different allocation methods. *Iranian Journal of Agricultural Economics and Development Research*, 52(4), 643-662. <https://doi.org/10.22059/ijaedr.2021.285992.668791> [In Persian]
- Shahbazi, H. (2025). Bayesian analysis of advertising effectiveness in Iran's dairy industry using saturation and sales funnel models. *Agricultural Economics and Development*, 33(3), 251-282. <https://doi.org/10.30490/aead.2025.367476.1682> [In Persian]
- Srinivasan, S., Hanssens, D. M., & Pauwels, K. (2014). Consumer attitude metrics for guiding marketing mix decisions. *Marketing Science*, 33(4), 534-550. <https://doi.org/10.1287/mksc.2013.0841>
- Sriram, S., Balachander, S., & Kalwani, M. U. (2007). Monitoring the dynamics of brand equity using store-level data. *Journal of Marketing*, 71(2), 61-78. <https://doi.org/10.1509/jmkg.71.2.061>
- Steenkamp, J.-B. E. M., & Geyskens, I. (2014). Manufacturer and retailer strategies to impact store brand share: Global integration, local adaptation, and worldwide learning. *Marketing Science*, 33(1), 6-26. <https://doi.org/10.1287/mksc.2013.0801>
- Tam, F. Y., & Lung, J. (2025). Digital marketing strategies for luxury fashion brands: A systematic literature review. *International Journal of Information Management Data Insights*, 5(1), Article 100309. <https://doi.org/10.1016/j.jjime.2024.100309>

- Tellis, G. J., Chandy, R. K., & Thaivanich, P. (2000). Which ad works, when, where, and how often? Modeling the effects of direct television advertising. *Journal of Marketing Research*, 37(1), 32-46. <https://doi.org/10.1509/jmkr.37.1.32.18716>
- Today Market Research Company [EMRC]. (2024, April 27). 30,000 television advertisements were recorded for the food and beverage product category during autumn 2023. <https://emrc.info/2024/04/30>
- Vidale, M. L., & Wolfe, H. B. (1957). An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising. *Operations Research*, 5(3), 370-381. <http://www.jstor.org/stable/167271>
- Villanueva, J., Yoo, S., & Hanssens, D. M. (2008). The impact of marketing-induced versus word-of-mouth customer acquisition on customer equity growth. *Journal of Marketing Research*, 45(1), 48-59. <https://doi.org/10.1509/jmkr.45.1.48>
- Wan, Y. (2023). Investigating the impact and effectiveness of digital marketing on brand awareness, sales and customer engagement. *Advances in Economics Management and Political Sciences*, 51(1), 146-152. <https://doi.org/10.54254/2754-1169/51/20230651>
- Wu, Y., & Liu, P. (2024). Pricing strategies for shared manufacturing platform considering cooperative advertising based on differential game. *PLOS ONE*, 19(7), e0303928. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0303928>
- Xiao, J., Li, Y., Tian, Y., Jiang, X., Wang, Y., & Wang, S. (2025). Optimising allocation of marketing resources among offline channel retailers: A bi-clustering-based model. *Journal of Business Research*, 186, Article 114914. <https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2024.114914>
- Yahia, Z., & ElBolak, M. A. (2025). A stochastic nonlinear programming model for budget mix optimization of digital marketing campaigns under uncertainty. *Future Business Journal*, 11, Article 238. <https://doi.org/10.1186/s43093-025-00664-x>
- Yang, Y., Feng, B., Salminen, J., & Jansen, B. J. (2022). Optimal advertising for a generalized Vidale-Wolfe response model. *Electronic Commerce Research*, 22(4), 1275-1305. <https://doi.org/10.1007/s10660-021-09468-x>
- Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1466-3>